



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

učební text

Josef Tošenovský

Ostrava 2012

Recenze: Ing. Radomír Perzina, Ph.D.
Prof. RNDr. Alena Lukasová, CS.c

Název: Teorie pravděpodobnosti
Autor: Josef Tošenovský
Vydání: První, 2012
Počet stran: 116
Náklad: 20

Studijní materiály pro studijní obor Řízení jakosti FMMI
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název: Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0339
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Josef Tošenovský
© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2591-5

OBSAH

1.	Kombinatorika	5
2.	Teorie míry	9
3.	Jevová algebra	12
3.1	Základní pojmy	12
3.2	Operace s jevy	13
3.3	Speciální jevy a skupiny jevů	13
3.4	Přehled hlavních zákonů v algebře jevů	13
4.	Definice pravděpodobnosti	18
5.	Věty o počítání s pravděpodobnostmi	24
6.	Opakované pokusy	34
6.1	Nezávislé pokusy	34
6.2	Závislé pokusy	35
6.3	Souvislost nezávislých a závislých pokusů	36
7.	Náhodná proměnná	41
8.	Číselné charakteristiky náhodných proměnných	53
8.1	Momentové charakteristiky	53
8.2	Kvantily	57
9.	Důležité typy rozdělení pravděpodobnosti	62
9.1	Důležité typy rozdělení pro diskrétní náhodné veličiny	62
9.2	Důležité typy rozdělení pro spojité náhodné veličiny	74
9.3	Třída exponenciálních rozdělení	93
10.	Funkce náhodné proměnné	98
10.1	Zákon rozdělení funkce náhodné proměnné	98
10.2	Číselné charakteristiky funkce náhodné proměnné	99
10.3	Momentová vytvořující funkce	100
10.4	Důležitá rozdělení funkce náhodné proměnné	101
11.	Náhodný vektor	111
11.1	Popis náhodného vektoru pomocí funkcí	112
11.2	Číselné charakteristiky náhodného vektoru	114
11.3	Důležité typy rozdělení náhodných vektorů	116

Animace

Úvod

Tento učební text obsahuje výklad základů teorie pravděpodobnosti v rozsahu, který je potřebný pro navazující předměty, zejména matematickou statistiku, ekonometrii, plánování experimentů, speciální statistické metody, management procesů a další.

Moderní teorie pravděpodobnosti je budována s využitím teorie množin a teorie míry. Proto jsou potřebné pojmy definovány ve zjednodušené podobě v kapitole Teorie míry.

Způsob výkladu odpovídá zavedeným zvyklostem v matematických disciplínách, tzn. nové pojmy jsou uváděny v definicích podle zásady, že k vysvětlení jednoho pojmu mohou být použity jen pojmy dříve definované. Tvrzení jsou uváděna ve větách bez důkazů, ty jsou provedeny na přednáškách a jen u vět, kde důkaz pomáhá lépe pochopit obsah tvrzení.

K usnadnění studia by měly napomoci ilustrační příklady a příklady na konci každé kapitoly.

1. KOMBINATORIKA



Čas ke studiu: 1 hodina



Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- a) definice základních pojmů z kombinatoriky
- b) vzorce potřebné pro výpočet pravděpodobností v dalších kapitolách

Vzhledem k tomu, že kombinatorika je náplní středoškolské matematiky, uvádíme jen přehled definic a vzorců bez dalšího vysvětlování. Jedná se tedy o shrnutí požadovaných znalostí.



Shrnutí pojmů z kombinatoriky

Definice 1

Variace k -té třídy z n různých prvků je určitým způsobem uspořádaná k -prvková podmnožina dané n prvkové množiny. Na uspořádání prvků v této množině záleží.

Věta 1

Počet variací k té třídy z n prvků je

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1)$$

Definice 2

Permutace z daných n prvků je určité uspořádání těchto n prvků.

Věta 2

Počet permutací z n prvků je

$$P(n) = n! \quad (2)$$

Definice 3

Kombinace k -té třídy z n různých prvků je určitá k prvková podmnožina dané n prvkové množiny. Na uspořádání prvků v této množině nezáleží.

Věta 3

Počet kombinací k té třídy z n prvků je

$$C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (3)$$

Definice 4

Variace k-té třídy z n různých prvků s opakováním je skupina k prvků určitým způsobem uspořádaných, z nichž každý je prvkem dané n prvkové množiny.

Věta 4

Počet variací k té třídy z n prvků s opakováním je

$$V_k^*(n) = n^k \quad (4)$$

Definice 5

Kombinace k-té třídy z n různých prvků s opakováním je skupina k prvků, z nichž každý je prvkem dané n prvkové množiny a může se ve skupině opakovat.

Věta 5

Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním je

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k} \quad (5)$$

Definice 6

Permutace $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ prvků s opakováním je určité uspořádání skupiny n prvků, v níž je k prvků navzájem různých a i-tý prvek se vyskytuje n_i – krát.

Věta 6

Počet permutací s opakováním z definice 6 je

$$P^*(n) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \quad (6)$$

Věta 7 (binomická) :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(7)

Věta 8 (pro přibližný výpočet mocniny dvojčlenu)

$$(1+a)^n \approx 1 + n \cdot a$$

(8)

pro malá a .

Příklad $1,002^{50} \approx (1 + 0,002)^{50} = 1 + 50 \cdot 0,002 = 1,1$ (přesně = 1,10506)

Věta 9 (Stirlingův vzorec pro přibližný výpočet $n!$)

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$$

(9)

Eulerova funkce gamma

Eulerova funkce gamma se vyskytuje u některých typů rozdělení pravděpodobnosti, se kterými se pracuje v dalších kapitolách.

Definice 7

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

(10)

Vlastnosti Eulerovy funkce

Věta 10

a)

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

b)

$$\Gamma(1) = 1$$

c)

$$n \in N \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

d)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Uvedené vlastnosti umožňují výpočet některých hodnot $\Gamma(x)$.

Například

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4!$$

$$\Gamma(3/2) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



Otázky ke kapitole 1

1. Jaký je rozdíl mezi pojmy kombinace a počet kombinací
2. Jaký je rozdíl mezi pojmy kombinace a variace
3. Jaký je rozdíl mezi pojmy variace a variace s opakováním?
Co znamená *s opakováním*?
4. Jak se čte zápis $n!$
5. Vypočítejte $3!$, $0!$
6. Napište funkci gamma
7. Uveďte vlastnosti funkce gamma
8. Vypočítejte $\Gamma(5)$ a $\Gamma(1,5)$
9. Jak se počítá odhad faktoriálů velkých čísel
10. Napište binomickou větu

2. TEORIE MÍRY



Čas ke studiu: 2 hodin



Cíl: Vysvětlit ty pojmy z obecné teorie míry, které jsou potřebné v dalším textu.

Moderní teorie pravděpodobnosti je budována s využitím teorie množin a teorie míry. V této kapitole proto vysvětlíme potřebné pojmy.



Výklad

Definice 1

- 1) Množina A se nazývá *konečná*, obsahuje-li konečný počet prvků. V opačném případě je *nekonečná*.
- 2) Množina se nazývá *spočetná*, je-li konečná, nebo ekvivalentní s množinou přirozených čísel.
- 4) Množina, jejíž prvky jsou opět množiny, se nazývá *systém množin* (místo množina množin).

Systémy množin, které mají některé speciální vlastnosti, jsou speciálně pojmenované.

Definice 2

Neprázdný systém S podmnožin množiny Ω se nazývá

- a) *okruh*, jestliže pro libovolné $A, B \in S$ je také $A \cup B \in S$, $A - B \in S$
- b) *algebra*, jestliže S je okruh a také $\Omega \in S$

Definice 3

Algebru resp. okruh nazveme σ algebra resp. σ okruh, platí-li implikace:

$$A_i \in S \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, \dots$$

Definice 4

- a) Je-li Ω libovolná neprázdná množina a S systém podmnožin množiny Ω , pak funkci μ , definovanou na S , nazýváme množinová funkce, jestliže každé množině $E \in S$ přiřadí číslo $\mu(E)$, tedy $\mu : S \rightarrow R$
- b) Množinová funkce μ je *aditivní*, jestliže $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- c) Množinová funkce μ je *σ aditivní*, jestliže platí

$$\mu \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Definice 5

Nechť S je σ okruh podmnožin množiny Ω . Množinová funkce μ definovaná na S se nazývá *míra*, jestliže platí:

- a) $\forall A \in S \quad \mu(A) \geq 0$
- b) μ je σ aditivní
- c) $\mu(\Phi) = 0$

Tedy: míra je nezáporná, σ aditivní množinová funkce, definovaná (vždy) na σ okruhu, pro kterou $\mu(\Phi) = 0$.

Vlastnosti míry**Věta 1**

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Věta 2

μ je neklesající, tj. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$



Otázky ke kapitole 2

1. Jaký je rozdíl mezi množinou konečnou a spočetnou
2. Kdy je systém množin okruhem (algebrou)
3. Co je sigma okruh (algebra)
4. Definujte míru
5. Uveďte vlastnosti míry

3. JEVOVÁ ALGEBRA



Čas ke studiu: 2 hodin



Cíl

- a) vysvětlit zejména dva základní pojmy: náhodný pokus a náhodný jev
- b) ukázat výhody množinového pojetí těchto pojmů
- c) ukázat styl práce při budování matematické teorie

V této kapitole zavedeme důležitý pojem náhodný jev a také operace s jevy, které umožní modelovat složitější situace. Vyjdeme z nedefinovaného pojmu *pokus*.



Výklad

3.1 Základní pojmy

Definice 1.

Náhodný pokus je takový pokus, jehož výsledek není předem znám.

Popsat (určit) pokus znamená:

- určit možné výsledky pokusu
- stanovit u každého výsledku, jakou má šanci, že nastane.

Řešení prvního úkolu vede k pojmům jev a jevová algebra, druhý k definici pravděpodobnosti, větám o počítání s pravděpodobnostmi a náhodné proměnné.

Definice 2.

Elementární jev je výsledek náhodného pokusu.

Množina všech elementárních jevů se značí Ω .

Definice 3.

Jev je každá podmnožina množiny Ω .

Jevy značíme stejně jako množiny: $A, B, \dots$. Je-li Ω konečná množina, pak nalezením všech jejích podmnožin nalezneme všechny jevy. Vznikne tak systém podmnožin množiny Ω , který se nazývá *jevové pole* a značí se S .

Příklad

Je-li náhodným pokusem hod hrací kostkou, pak množina elementárních jevů bude $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a každá její podmnožina, např. $\{1, 2, 4, 6\}$, je jev.

3.2 Operace s jevy

Množinové definování jevů se postupně ukáže jako velmi užitečné. Např. s jevy = množinami lze provádět všechny množinové operace. Je potřeba jen vysvětlit, co se rozumí jednotlivými operacemi v jevové algebře.

Definice 4.

- 1) *Sjednocením* dvou jevů $A \cup B$ se rozumí, že nastal alespoň jeden z nich.
- 2) *Průnik* dvou jevů $A \cap B$ znamená, že nastaly oba současně.
- 3) *Opačný jev* $\bar{A}$ k jevu A znamená, že nenastal jev A .

3.3 Speciální jevy a skupiny jevů**Definice 5**

- 1) *Jistý jev* je takový jev, který určitě nastane. Značí se Ω .
- 2) *Nemožný jev* je takový jev, který určitě nenastane. Značí se Φ , tj. jako prázdná množina.
- 3) Jevy A, B jsou *navzájem disjunktní*, jestliže $A \cap B = \Phi$.
- 4) *Jevy navzájem opačné* jsou takové jevy, pro které platí:

- a) $A \cup \bar{A} = \Omega$,
- b) $A \cap \bar{A} = \Phi$.

- 5) *Úplná skupina jevů*: Jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ tvoří úplnou skupinu jevů, jestliže platí:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

3.4 Přehled hlavních zákonů v algebře jevů**Věta 1**

- a) zákony idempotence:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \Phi = A$$

$$A \cap \Phi = \Phi$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \Omega = A$$

b) zákon opačných jevů

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{\Omega} = \Phi$$

$$\overline{\Phi} = \Omega$$

c) pro průnik a sjednocení jevů platí zákon komutativní, asociativní a distributivní

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d) zákony de Morganovy

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

V minulosti se nerozlišoval pojem jev a elementární jev a nevyužíval se k definování jevu pojem množina. Také operační znaménka nebyla množinová, ale „+“ a „-“.

Množinové definování jevů má např. tyto výhody:

- a) není potřeba definovat operace s jevy = množinami,
- b) není potřeba dokazovat vlastnosti operací s jevy,
- c) snadno se naleznou všechny jevy = podmnožiny Ω ,
- d) snadno se definuje pojem pravděpodobnost jevu, jak uvidíme v následující kapitole.



Shrnutí

V této kapitole byly objasněny dva významné pojmy: náhodný pokus a náhodný jev. U definice jevu bylo ukázáno, že množinové pojetí tohoto pojmu umožní snadno definovat operace s jevy a ukázat vlastnosti těchto operací.



Otázky ke kapitole 3

1. Definujte jev jako množinu.
2. Které operace s jevy znáte?
3. Které speciální jevy znáte?
4. Ukažte na Vennových diagramech základní vlastnosti operací s jevy.
5. Definujte jevové pole. Jak se značí?
6. Jaké dvě vlastnosti musí mít opačné jevy?

7. Co je to úplná skupina jevů?
8. Uveďte de Morganovy zákony.
9. Jaké výhody má množinové definování jevů?
10. Jaký je rozdíl mezi pokusem a náhodným pokusem?
11. Uveďte příklad náhodného pokusu, elementárního jevu a jevu.



Úlohy ke kapitole 3

1. Ověřte, zda jevy $\overline{A \cup B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap B$ tvoří úplnou skupinu jevů.
2. Určete jev X tak, aby jevy $A \cap B \cap C$, X , $B \cap (\overline{A \cup C})$, $B \cap C \cap \overline{A}$, $A \cap B \cap \overline{C}$ tvořily úplnou skupinu navzájem disjunktních jevů.
3. A , B , C jsou tři libovolné jevy. Vyjádřete, že se uskutečnily:
 - a) pouze jev A ,
 - b) právě jevy A a B ,
 - c) právě dva jevy,
 - d) ani jeden jev,
 - e) všechny jevy,
 - f) aspoň dva jevy,
 - g) ne více než tři jevy.
4. Ke zkoušce jde 10 studentů. Jevy A_k , B_k , C_k po řadě znamenají, že zkoušku udělalo:
 - alespoň k studentů
 - nejvýše k studentů
 - právě k studentů.

Kolik studentů udělalo zkoušku, jestliže nastaly jevy:

a) $A_2 \cap A_3$	d) $\overline{C_0}$
b) $A_2 \cup A_3$	e) $B_2 \cap B_4$
c) $\overline{C_3}$	f) $B_2 \cup B_4$
5. Zapište pomocí symboliky uvedené v příkladu 3 jevy:
 - a) zkoušku udělali dva až tři nebo tři až čtyři studenti,
 - b) zkoušku udělali nejvýše čtyři nebo alespoň sedm studentů.
6. Student udělá zkoušku (jev A), jestliže napíše úspěšně písemku (jev B) a zodpoví při ústní zkoušce alespoň jednu ze tří otázek (C_i : zodpověděl i -tou otázkou, $i=1, 2, 3$). Vyjádřete jev A pomocí jevů B a C_i .



KLÍČ K ŘEŠENÍ KAP. 3

Řešení(1):

Mají-li tyto jevy tvořit úplnou skupinu jevů, musí platit:

$$\overline{(A \cup B)} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) = I$$

Použijeme vztah: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) &= I \Rightarrow (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) = I \\ \Rightarrow [\bar{A} \cap (\bar{B} \cup B)] \cup [A \cap (\bar{B} \cup B)] &= I \Rightarrow (\bar{A} \cap I) \cup (A \cap I) = I \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{A} \cup A &= I. \end{aligned}$$

Řešení(2):

$$(A \cap B \cap C) \cup X \cup B \cap (\overline{A \cup C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) = I$$

$$(A \cap B \cap C) \cup X \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) = I$$

$$[A \cap B \cap (C \cup \bar{C})] \cup [B \cap \bar{A} \cap (\bar{C} \cup C)] \cup X = I$$

$$B \cap (A \cup \bar{A}) \cup X = I$$

$$B \cup X = I \Rightarrow X = \bar{B}$$

Řešení(3):

a) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

b) $A \cap B \cap \bar{C}$

c) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

d) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

e) $A \cap B \cap C$

f) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

g) I

Řešení(4):

a) zkoušku udělali alespoň 3 studenti,

b) zkoušku udělali alespoň 2 studenti,

c) opačný jev k „právě tři“: nejvýše dva nebo alespoň čtyři studenti,

- d) opačný jev: alespoň jeden student,
- e) zkoušku udělali nejvýše dva studenti,
- f) zkoušku udělali nejvýše čtyři studenti.

Řešení(5): a) $A_2 \cap B_4$ b) $B_4 \cup A_7$

Řešení(6):

Jev A nastane, nastane-li jev B *a současně* alespoň jeden z jevů C_1, C_2, C_3 , tj. $A = B \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$

4. DEFINICE PRAVDĚPODOBNOTI



Čas ke studiu: 2 hodin



Cíl

- a) definovat pojem pravděpodobnost a ukázat souvislost s pojmem míra
- b) ukázat dva praktické návody na výpočet pravděpodobnosti jevu

Po zavedení pojmu náhodný jev se budeme zabývat otázkou definování pravděpodobnosti náhodného jevu a způsoby výpočtu této pravděpodobnosti.



Výklad

Na počátku třetí kapitoly jsme konstatovali, že k popisu náhodného pokusu je potřeba zjistit možné výsledky pokusu a stanovit, jakou mají „naději“, že nastanou. Problém nalezení možných výsledků (jevů) je vyřešen nalezením jevového pole. Nyní budeme precizovat pojem „naděje“ jevu A jako jeho pravděpodobnost a uvedeme několik způsobů, jak ji vyčíslit.

Definice 1 (axiomatická)

Pravděpodobnost jevu A je množinová funkce P , definovaná na jevovém poli S a přiřazující každému jevu A číslo $P(A)$ takové, že platí:

- a) $P(A) \geq 0$
- b) $P(\Omega) = 1$
- c) Je-li $A \cap B = \Phi$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Z definice je zřejmé, že *pravděpodobnost je míra P , definovaná na jevovém poli S* . Protože v bodě b) je dána maximální hodnota této míry, hovoříme o *míře s normou*.

Definice 2.

Trojice (Ω, S, P) se nazývá *pravděpodobnostní prostor*.

Vlastnosti, uvedené v definici 1, jsou *axiomy teorie pravděpodobnosti* (autorem je Kolmogorov, 1933). Protože nedávají praktický návod, jak pravděpodobnost jevu vypočítat, zavádějí se další definice pro praktický výpočet.

Definice 3 (klasická)

Má-li pokus

- a) konečný počet n
- b) stejně pravděpodobných výsledků

a jestliže při m výsledcích nastane jev A , pak pravděpodobnost jevu A je vyjádřena číslem:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Číslo m bývá označováno „počet příznivých případů“ a číslo n je „počet možných případů“.

Bez omezujících předpokladů klasické definice lze pravděpodobnost *odhadnout* pomocí statistické definice:

Definice 4 (statistická)

Nechť jev A je jedním z možných výsledků pokusu. Jestliže při n -násobném opakování tohoto pokusu nastane jev A právě $m(A)$ - krát, pak pravděpodobnost jevu A *odhadujeme* poměrem:

$$P(A) \approx \frac{m(A)}{n} \quad (2)$$

Číslo $m(A)$ se nazývá absolutní četnost jevu A , číslo $\frac{m(A)}{n}$ je relativní četnost A .

Přesnost odhadu závisí na počtu opakování daného pokusu (n): při malém počtu pokusů má relativní četnost značně kolísavý charakter, s rostoucím n dochází ke stabilizaci poměru $\frac{m(A)}{n}$ a při neomezeném počtu pokusů je relativní četnost rovna pravděpodobnosti.

Hovoříme o konvergenci $\frac{m(A)}{n}$ podle pravděpodobnosti k $P(A)$.

Přesně tuto skutečnost popisuje následující věta.

Věta 1 (Bernouliova)

Veličina $\frac{m(A)}{n}$ konverguje podle pravděpodobnosti k veličině $P(A)$, jestliže pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim P\left(\left|\frac{m(A)}{n} - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty$$



Otázky ke kapitole 4

1. Které definice pravděpodobnosti znáte?
2. Uveďte axiomy teorie pravděpodobnosti.
3. Definujte pravděpodobnostní prostor. Jak se značí?
4. Uveďte podmínky klasické definice pravděpodobnosti.
5. Uveďte statistickou definici pravděpodobnosti. V čem se zejména liší od klasické definice? Která věta tuto odlišnost formuluje?
6. Uveďte příklad, kdy lze použít k výpočtu pravděpodobnosti jen klasickou definici. Jsou splněny potřebné předpoklady?
7. Uveďte příklad, kdy lze použít k výpočtu pravděpodobnosti jen statistickou definici.
8. Uveďte příklad, kdy lze použít k výpočtu pravděpodobnosti klasickou i statistickou definici.



Úlohy ke kapitole 4

1. Do kolony bylo náhodně seřazeno sedm automobilů: čtyři vozy T 613 a tři vozy T 603. Jaká je pravděpodobnost, že první a poslední vůz je T 613?
2. V osudí jsou 4 černé a 6 červených koulí. Náhodně vybereme 4 koule. Jaká je pravděpodobnost, že tři budou červené a jedna černá?
3. V zástupu sedmi lidí jsou tři ženy. Jaká je pravděpodobnost, že ženy stojí bezprostředně za sebou?
4. V osudí je deset černých a deset bílých koulí. Náhodně je vytaženo sedm koulí. Určete pravděpodobnost, že:
 - a) čtyři z vytažených koulí jsou bílé,
 - b) alespoň pět vytažených koulí je bílých,
 - c) mezi vytaženými koulemi je červených více.
5. Na MS v hokeji hraje osm družstev systémem každý s každým dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že hned v prvním zápase se utkají nejlepší dvě družstva, předpokládá-li se, že družstva jsou rozlosována bez ohledu na výkonnost?
6. Ze 12 výrobků je 25 % vadných. Náhodně vytáhneme 4 výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že právě 50 % z nich je vadných?

7. V telefonním seznamu náhodně vybereme jedno šestimístné číslo (může začínat nulou a předpokládá se, že v seznamu jsou použita všechna šestimístná čísla).

Jaká je pravděpodobnost, že

- a) neobsahuje nulu,
- b) obsahuje jednu trojku,

8. Do cíle automobilového závodu přijely čtyři vozy značky Škoda, tři značky Moskvíč a dva značky Fiat. Jaká je pravděpodobnost, že vozy stejných značek přijely za sebou?

9. Mezi deseti výrobky jsou čtyři první jakosti, tři druhé jakosti, dva třetí a jeden čtvrté jakosti. Z těchto výrobků náhodně vybereme a) čtyři, b) tři.

Jaká je pravděpodobnost, že každý z vybraných výrobků má jinou jakost?



KLÍČ K ŘEŠENÍ KAP.4

Řešení(1):

Na první a poslední místo v koloně lze postavit vozy T 613 celkem $V_2(4)$ způsoby. Všech možných způsobů seřazení sedmi vozů je $P(7)$, automobily mezi prvním a posledním vozem lze seřadit $P(5)$ způsoby. Proto vychází:

$$P = \frac{V_2(4) \cdot P(5)}{P(7)} = \frac{1}{7}$$

Řešení(2):

Vybrat 4 koule znamená vytvořit čtveřici. Všech možných čtveřic lze vytvořit $C_4(10)$. „Příznivé“ budou ty, v nichž jsou tři červené a jedna černá koule. Takových čtveřic je možné vytvořit $C_3(6) \cdot C_1(4)$. Proto dostaneme:

$$P = \frac{C_3(6) \cdot C_1(4)}{C_4(10)} = \frac{8}{21}$$

Řešení(3):

Ženy mohou stát na 1. – 3. místě, 2. – 4., ..., tj. celkem je 5 možností. V každém postavení lze ženy seřadit $P(3)$ způsoby a ostatní $P(4)$ způsoby. Proto:

$$P = \frac{P(3) \cdot P(4)}{P(7)} \cdot 5 = \frac{1}{7}$$

Řešení(4):

$$a) P = \frac{C_4(10) \cdot C_3(10)}{C_7(20)}$$

$$b) P = \frac{C_5(10) \cdot C_2(10)}{C_7(20)} + \frac{C_6(10) \cdot C_1(10)}{C_7(20)} + \frac{C_7(10)}{C_7(20)}$$

c) černé jsou alespoň čtyři:

$$P = \frac{C_4(10) \cdot C_3(10)}{C_7(20)} + \frac{C_5(10) \cdot C_2(10)}{C_7(20)} + \frac{C_6(10) \cdot C_1(10)}{C_7(20)} + \frac{C_7(10)}{C_7(20)}$$

Řešení(5):

Hraje-li každý s každým dvakrát, budeme při tvoření všech možných dvojic rozlišovat pořadí, potom všech možných dvojic je $V_2(8)$. Nejlepší dvě družstva (A, B) lze vylosovat k prvnímu utkání dvěma způsoby: (AB), (BA). Proto:

$$P = \frac{2}{V_2(8)} = \frac{1}{28}$$

Řešení(6):

$$P = \frac{C_2(3) \cdot C_2(9)}{C_4(12)} = \frac{12}{55}$$

Řešení(7):

a) neobsahuje-li nulu, je tvořeno z číslic 1, 2, ..., 9 ; takových čísel lze vytvořit $V_6^*(9)$;
všech šesticiferných čísel je $V_6^*(10)$, tedy

$$P = \frac{V_6^*(9)}{V_6^*(10)} = 0,531$$

b) nechť trojka je např. na 1. místě.

Zbývá 9 cifer, z nichž tvoříme všechny možné pětice k obsazení zbývajících pěti míst.

Takových petic je $V_5^*(9)$. Trojka může být na šesti místech, takže

$$P = \frac{6 \cdot V_5^*(9)}{V_6^*(10)} = 0,354$$

Řešení(8):

Jeden z možných dojezdů značek je např. ŠFM. Tímto způsobem mohou vozy přijet $4! \cdot 2! \cdot 3!$ způsoby. Skupiny téže značky lze přiřazovat $3!$ způsoby, celkem je tedy $3! \cdot (4! \cdot 2! \cdot 3!)$ možných dojezdů, kdy vozy téže značky přijedou za sebou. Všech dojezdů je $9!$, takže

$$P = \frac{3!(4!2!3!)}{9!} = \frac{1}{210}$$

Řešení(9):

a)

$$P = \frac{C_1(4) \cdot C_1(3) \cdot C_1(2) \cdot C_1(1)}{C_4(10)} = \frac{4}{35}$$

b) při výběru tří výrobků jsou čtyři možnosti jakostí : I, II, III; I, II, IV; I, III, IV; II, III, IV. Proto

$$P = \frac{C_1(4) \cdot C_1(3) \cdot C_1(2) + C_1(4) \cdot C_1(3) \cdot C_1(1) + C_1(4) \cdot C_1(2) \cdot C_1(1) + C_1(3) \cdot C_1(2) \cdot C_1(1)}{C_4(10)} = \frac{5}{12}$$

5. VĚTY O POČÍTÁNÍ S PRAVDĚPODOBNOSTMI



Čas ke studiu: 2 hodin



Cíl

- a) uvést základní věty, které umožňují počítat pravděpodobnosti jevů, vytvořených operacemi s jinými jevy
- b) ukázat základní situace, při kterých je potřeba provádět operace s jevy

Definice pravděpodobnosti, uvedené v předchozí kapitole, neumožňují vypočítat pravděpodobnost jevu, který vznikl jako výsledek operací s jevy. K tomuto účelu slouží věty o počítání s pravděpodobnostmi.



Výklad

Věta 1 (pravděpodobnost opačného jevu)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1)$$

Věta 2 (pravděpodobnost nemožného jevu)

$$P(\Phi) = 0$$

Definice 1 (podmíněná pravděpodobnost)

Pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B ($P(B) > 0$), zapisujeme $P(A|B)$ a počítáme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2)$$

Věta 3 (o pravděpodobnosti průniku)

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (3)$$

Věta 3 je důsledkem definice 1. Dva způsoby výpočtu jsou uvedeny proto, že $A \cap B = B \cap A$, takže zaměníme-li na levé straně A a B, dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Definice 2

Jestliže $P(A | B) = P(A)$, tj. podmíněná pravděpodobnost se rovná nepodmíněné, nazýváme jevy A a B *navzájem nezávislými*.

Speciálně, jsou li A a B *nezávislé* jevy, je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Poznámky

a) Mluvit o nezávislosti má smysl až tehdy, je-li definována pravděpodobnost: nezávislost je *pravděpodobnostní* pojem, na rozdíl od neslučitelnosti, která je *množinový* pojem.

b) Jestliže jsou jevy A, B nezávislé, jsou nezávislé i dvojice jevů:

$$(A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B}).$$

c) Nezávislost jevů se neposuzuje podle definice, ale podle konkrétních podmínek pokusu.

Věta 4 (o pravděpodobnosti sjednocení)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Speciálně, jsou li A a B neslučitelné jevy, pak $P(A \cap B) = P(\Phi) = 0$, takže

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Věta 5 (věta o úplné pravděpodobnosti)

Jestliže jev A se může uskutečnit pouze současně s některým z jevů $H_1, H_2, \dots, H_n$, které tvoří úplnou skupinu navzájem disjunktních jevů, $P(H_i) > 0$, pak platí

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i),$$

(4)

Věta 6 (Bayesův vzorec resp. věta o hypotézách)

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(A)} \quad (5)$$

Příklad (k větám 5 a 6)

V obchodě jsou tři pokladny, na kterých dojde k chybě při účtování postupně s pravděpodobnostmi 0,01; 0,02 a 0,03.

- a) jaká je pravděpodobnost, že po opuštění obchodu máme chybný účet
 b) s jakou pravděpodobností jsme byli u druhé pokladny, máme-li chybný účet.

Řešení:

Označme jev A = máme chybný účet, H_i = byli jsme u i -té pokladny.

Se stejnou pravděpodobností si vybereme kteroukoliv pokladnu, takže $P(H_i) = 1/3$.

$$a) \quad P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A | H_i) = \frac{1}{3} 0,01 + \frac{1}{3} 0,02 + \frac{1}{3} 0,03 = 0,02$$

$$b) \quad P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} 0,02}{0,02} = \frac{1}{3}$$



Shrnutí kapitoly 5

Po absolvování páté kapitoly umíte počítat pravděpodobnosti nejen pomocí definic, ale také pomocí vět, které uplatníte u pravděpodobnosti složených jevů.



Otázky ke kapitole 5

1. Napište definici podmíněné pravděpodobnosti
2. Napište větu o pravděpodobnosti součtu dvou jevů
3. Za jakých podmínek a jak lze zjednodušit větu o pravděpodobnosti součtu dvou jevů
4. Napište větu o pravděpodobnosti součinu dvou jevů
5. Za jakých podmínek a jak lze zjednodušit větu o pravděpodobnosti součinu dvou jevů
6. Napište větu o úplné pravděpodobnosti
7. Za jakých okolností se použije věta o úplné pravděpodobnosti
8. Napište Bayesův vzorec
9. Za jakých okolností se použije Bayesův vzorec



Úlohy ke kapitole 5

1. Mějme dvě osudí, v prvním (O_1) jsou tři bílé a dvě černé koule, ve druhém (O_2) jsou čtyři bílé a čtyři černé koule. Náhodně volíme osudí a z něho náhodně vybereme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že
 - a) vytažená koule je bílá,
 - b) vytažená koule je černá,
 - c) tah byl proveden z osudí O_2 , byla-li vytažena bílá koule,
 - d) tah byl proveden z osudí O_1 , byla-li vytažena černá koule?
2. Mezi sedmi výrobky jsou dva nekvalitní. Náhodně byly vybrány dva výrobky a potom tři výrobky. Určete pravděpodobnost, že právě jeden z posledních třech vybraných výrobků je nekvalitní.
3. V prodejně jsou dvě přihrádky, každá obsahuje deset výrobků. V první přihrádce jsou tři výrobky druhé jakosti, ve druhé jsou čtyři druhé jakosti. Zákazník si náhodně vybírá přihrádku i výrobek. Určete pravděpodobnost toho, že
 - a) vybral výrobek první jakosti,
 - b) vybíral z první přihrádky, je-li vybraný výrobek druhé jakosti.
4. Ze dvaceti zkušebních otázek nezná jistý student pět. S jakou pravděpodobností si vytáhne otázku, kterou nezná, jestliže dvě z daných dvaceti otázek byly již vytaženy?
5. V podniku mají šest traktorů, z nichž dva nejsou v dobrém technickém stavu. Náhodně byly vybrány tři traktory, z nichž jeden byl krátce po vyjetí kontrolován dopravní hlídkou. Jaká je pravděpodobnost, že nebyl v dobrém technickém stavu?
6. V jistém provozu jsou dvě dílny, v každé je osm soustruhů, přičemž v první dílně je jeden z osmi soustruhů vadný, ve druhé dva vadné. V každé dílně byl náhodně vybrán jeden soustruh a přemístěn do druhé dílny. Jaká je pravděpodobnost, že počet vadných soustruhů se v dílnách nezměnil?
7. Mějme čtyři bílé a dvě černé koule. Náhodně z nich vybereme a) jednu, b) dvě, a přidáme je do osudí, kde jsou tři bílé a čtyři černé koule. Potom náhodně vytáhneme dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že každá je jiné barvy?
8. Mějme 3 bílé, 4 černé a 2 červené kuličky. Jednu z nich přidáme do osudí, kde jsou 3 černé a 4 bílé kuličky; potom náhodně vybereme jednu z nich. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kulička je bílá?
9. Z jedné ze tří studijních skupin náhodně vybereme studenta. Jaká je pravděpodobnost,

že tento student se zúčastnil SVOČ, jestliže z 1. studijní skupiny se zúčastnilo SVOČ 18% studentů, ze druhé 12% a ze třetí 9%?

10. Do jistého podniku jsou dováženy ocelové pruty ze tří závodů. Množství prutů dodávaných jednotlivými závody je v poměru 2:3:5. Přitom první závod má mezi svými výrobky 2% nekvalitních, ostatní závody po 1%. Náhodně byl vybrán prut ke kontrole. Jaká je pravděpodobnost, že byl a) dobrý, b) nekvalitní?
11. V osudí může být mezi dvaceti kuličkami se stejnou pravděpodobností 3-6 červených, ostatní jsou bílé. Náhodně vybereme 5 kuliček. Jaká je pravděpodobnost, že jsou všechny bílé?
12. Ze čtyř zaměstnanců A, B, C, D nedodrží bezpečnostní předpisy A s pravděpodobností 0,2 ; B s pravděpodobností 0,3; C a D s pravděpodobností 0,4. Určete pravděpodobnost toho, že :
 a) kontrolovaný zaměstnanec nedodržel bezpečnostní předpisy
 b) zaměstnanec, u něhož bylo zjištěno porušení bezpečnostních předpisů byl zaměstnanec B.
13. Při prázdninové letní aktivitě nastoupilo do hutního závodu z fakulty strojní a elektrotechnické 20% studentů, z hutní fakulty 50%, z hornicko-geologické 20% a z ekonomické fakulty 10% studentů. Přitom studentky byly z jednotlivých fakult zastoupeny postupně 5%, 10%, 20% a 60%. Určete pravděpodobnost, že :
 a) nově přicházející brigádník je studentka
 b) student, který nastoupil, je z fakulty strojní a elektrotechnické
14. V novinovém stánku mají pohlednice za 0,70Kč – celkem 10 ks, za 1,-Kč také 10 ks, za 2Kč 5 kusů. Nahodile vyberte dvě. Jaká je pravděpodobnost, že budeme schopni zaplatit, máme-li 2,-Kč.
15. Mezi deseti studenty jsou tři dívky. Studenti jsou náhodně rozdělení do dvou skupin po pěti. Jaká je naděje, že v každé skupině bude aspoň jedna dívka?
16. Tři kolektivy horníků překonají rekord v těžbě uhlí s pravděpodobnostmi po řadě 0,4; 0,6 a 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že dosavadní rekord překoná
 a) alespoň jeden kolektiv
 b) právě dva kolektivy
 c) žádný kolektiv
17. Z čísel 0,1,2,...,9 náhodně vyberte dvě. Jaká je pravděpodobnost, že jedno je menší než sedm a jedno větší než sedm?



KLÍČ K ŘEŠENÍ KAP.5

Řešení(1):

- a) bílou lze vytáhnout tak, že volíme A a z něho vytáhneme bílou, nebo volíme B a vytáhneme bílou

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} = \frac{11}{20}$$

- b) podobně

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} = \frac{9}{20},$$

$$\text{nebo } P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

- c)

$$P(O_2 | B) = \frac{P(O_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}$$

- d)

$$P(O_1 | C) = \frac{P(O_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{4}{9}$$

Řešení(2):

Protože nevíme, jaké dva výrobky byly nejprve vybrány, je nutné uvážit všechny možnosti:

- a) jsou vybrány dva kvalitní výrobky a to s pravděpodobností

$$P_a = \frac{C_2(5)}{C_2(7)}$$

Potom jeden ze tří vybraných bude nekvalitní s pravděpodobností

$$P_1 = \frac{C_2(3) \cdot C_1(2)}{C_3(5)},$$

b) jsou vybrány dva nekvalitní s pravděpodobností

$$P_b = \frac{C_2(2)}{C_2(7)}, \text{ proto } P_2 = 0,$$

c) je vybrán jeden kvalitní a jeden nekvalitní s pravděpodobností

$$P_c = \frac{C_1(5) \cdot C_1(2)}{C_2(7)}, \text{ takže } P_3 = \frac{C_2(4) \cdot C_1(1)}{C_3(5)},$$

Výsledná pravděpodobnost

$$P = \frac{C_2(5)}{C_2(7)} \cdot \frac{C_2(3) \cdot C_1(2)}{C_3(5)} + \frac{C_2(2)}{C_2(7)} \cdot 0 + \frac{C_1(5) \cdot C_1(2)}{C_2(7)} \cdot \frac{C_2(4) \cdot C_1(1)}{C_3(5)} = \frac{12}{21}.$$

Řešení(3):

$$\text{a) } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{13}{20}$$

$$\text{b) } P = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{3}{7}.$$

Řešení(4):

Neznáme, které dvě byly vytaženy, proto předpokládáme všechny možnosti:

a. byly vytaženy dvě, které nezná

$$P(A) = \frac{C_2(5) \cdot C_0(15)}{C_2(20)} = \frac{1}{19},$$

b. jedna, kterou nezná

$$P(B) = \frac{C_1(5) \cdot C_1(15)}{C_2(20)} = \frac{15}{38},$$

c. dvě, které zná:

$$P(C) = \frac{C_0(5) \cdot C_2(15)}{C_2(20)} = \frac{21}{38},$$

potom

$$P = \frac{1}{19} \cdot \frac{3}{18} + \frac{15}{38} \cdot \frac{4}{18} + \frac{21}{38} \cdot \frac{5}{18} = \frac{19}{76} = 0,25.$$

Řešení(5):

Podobně jako v předcházejícím příkladu dostaneme:

$$P = \frac{C_2(2) \cdot C_1(4)}{C_3(6)} \cdot \frac{2}{3} + \frac{C_1(2) \cdot C_2(4)}{C_3(6)} \cdot \frac{1}{3} + \frac{C_0(2) \cdot C_3(4)}{C_3(6)} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

Řešení(6):

Stav v dílnách se nezmění, jestliže budou přemístěny dobré stroje nebo špatné stroje, tedy

$$P = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{11}{16}.$$

Řešení(7):

Podobně jako ve 4. příkladu dostaneme:

a)

$$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{C_1(4) \cdot C_1(4)}{C_2(8)} + \frac{2}{6} \cdot \frac{C_1(3) \cdot C_1(5)}{C_2(8)} = \frac{329}{588} = 0,559;$$

b)

$$P = \frac{C_2(4)}{C_2(6)} \cdot \frac{C_1(5) \cdot C_1(4)}{C_2(9)} + \frac{C_1(4) \cdot C_1(2)}{C_2(6)} \cdot \frac{C_1(4) \cdot C_1(5)}{C_2(9)} + \frac{C_2(2) \cdot C_0(4)}{C_2(6)} \cdot \frac{C_1(3) \cdot C_1(6)}{C_2(9)} = \frac{149}{270} = 0,552.$$

Řešení(8):

Jev A značí vytažení bílé kuličky; H_1 značí, že byla přidána bílá kulička; H_2 značí, že nebyla přidána bílá kulička. Potom

$$P(A) = P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{24} = 0,542$$

Řešení(9):

Zřejmě $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$; H_i značí, že vybraný student je z i -té skupiny.

Potom

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0,18 + \frac{1}{3} \cdot 0,12 + \frac{1}{3} \cdot 0,09 = 0,13$$

Řešení(10):

Nechť H_i značí náhodně vybraný prut z i -tého závodu; zřejmě

$$P(H_1) = \frac{2}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{5}{10}.$$

Potom

$$a) P(A) = 0,2 \cdot 0,98 + 0,3 \cdot 0,99 + 0,5 \cdot 0,99 = 0,988$$

$$b) P(\bar{A}) = 1 - 0,988 = 0,2 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,01 = 0,012$$

Řešení(11):

Poněvadž všechny předpoklady o počtu bílých kuliček jsou stejně pravděpodobné a poněvadž máme 4 možnosti (3-6 červených) je $P(H_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$P = \frac{1}{4} \frac{C_5(17)}{C_5(20)} + \frac{1}{4} \frac{C_5(16)}{C_5(20)} + \frac{1}{4} \frac{C_5(15)}{C_5(20)} + \frac{1}{4} \frac{C_5(14)}{C_5(20)} = \frac{1}{4} (0,399 + 0,282 + 0,194 + 0,129) = 0,251$$

Řešení(12):

a) Jsou 4 zaměstnanci a 4 stejně pravděpodobné možnosti, tedy $P(H_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Proto $P(N) = 1/4(0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,4) = 0,325$, kde $P(N)$ značí pravděpodobnost nedodržení předpisů některého ze zaměstnanců A, B, C, D.

b) Nechť N značí, že nebyly dodrženy bezpečnostní předpisy, napíšeme-li pravděpodobnost součinu B, N oběma způsoby, vychází:

$$P(B/N) = \frac{P(B)P(N/B)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0,3}{0,325} = 0,231$$

18. Při prázdninové letní aktivitě nastoupilo do hutního závodu z fakulty strojní a elektrotechnické 20% studentů, z hutní fakulty 50%, z hornicko-geologické 20% a z ekonomické fakulty 10% studentů. Přitom studentky byly z jednotlivých fakult zastoupeny postupně 5%, 10%, 20% a 60%. Určete pravděpodobnost, že :

c) nově přicházející brigádník je studentka

d) student, který nastoupil, je z fakulty strojní a elektrotechnické

Řešení(13):

a) Pravděpodobnost, že nastoupí studentka závisí na tom, ze které fakulty přichází; jednotlivé fakulty jsou zastoupeny různými počty; z jednotlivých fakult nastoupí studující s pravděpodobnostmi postupně 0,2; 0,5; 0,2; 0,1; studentka to bude v jednotlivých případech s pravděpodobnostmi 0,05; 0,1; 0,2; 0,6. Proto:

$$P = 0,2 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,16$$

- b) Necht' H značí, že nastoupil student, D necht' značí nástup studentky a S že jde o studenta strojní a elektrotechnické fakulty. Potom podobně jako v předcházejícím příkladě vychází:

$$P(S|H) = \frac{P(S)P(H|S)}{P(H)} = \frac{P(S)P(H|S)}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \cdot 0,95}{1 - 0,16} = 0,226$$

Řešení(14):

Zaplatit můžeme, vybereme-li 2 pohlednice po 0,70Kč, nebo dvě po 1,-Kč nebo konečně 1 kus za 0,70Kč a jeden kus za 1,-Kč. Pravděpodobnost, že provedeme některý z těchto výběru je:

$$P = \frac{C_2(10)}{C_2(25)} + \frac{C_2(10)}{C_2(25)} + \frac{C_1(10) \cdot C_1(10)}{C_2(25)} = 0,633$$

Řešení(15):

Skupiny lze vytvořit dvěma způsoby: v první skupině jsou dvě studentky a ve druhé jedna, nebo obráceně. Pravděpodobnost, že skupiny budou takto vytvořeny :

$$P = \frac{C_1(3) \cdot C_1(7)}{C_2(10)} \cdot \frac{C_2(2) \cdot C_2(3)}{C_2(5)} + \frac{C_2(3) \cdot C_2(7)}{C_2(10)} \cdot \frac{C_1(1) \cdot C_1(4)}{C_2(5)} = 0,833$$

Řešení(16):

$$a) P = [(1 - 0,4)(1 - 0,6)(1 - 0,8)] = 1 - 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 1 - 0,048 = 0,952$$

$$b) P = 0,4 \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,8) + 0,4(1 - 0,6)0,8 + (1 - 0,4) \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,464$$

$$c) P = (1 - 0,4)(1 - 0,6)(1 - 0,8) = 0,048$$

Řešení(17):

Vybírejme čísla postupně: pravděpodobnost, že první vybrané číslo je menší než sedm: $P_1 = \frac{7}{10}$; druhé číslo vybíráme z devíti: $P_2 = \frac{2}{9}$; proto

$$P = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0,311$$

6. OPAKOVANÉ POKUSY



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl

- a) použití vzorců 1 a 3 při řešení konkrétních úloh
- b) pochopení rozdílu mezi opakovaným pokusy závislými a nezávislými

V této kapitole budou uvedeny dvě velmi časté situace, souhrnně nazvané opakované pokusy. Jsou probrány samostatně a na závěr je uvedena jejich souvislost.



Výklad

Definice 1

Provádí se n pokusů a hledá se pravděpodobnost, že sledovaný jev A nastane při těchto n pokusech x -krát.

Jestliže pravděpodobnost jevu A při každém opakování nezávisí na výsledcích předchozích pokusů, potom tyto pokusy nazveme *nezávislými pokusy* resp. *Bernoulliho posloupnost nezávislých pokusů*.

Závislými pokusy nazveme takové opakované pokusy, při nichž pravděpodobnost nastoupení jevu A v určitém pokusu je závislá na výsledcích předcházejících pokusů.

6.1 Nezávislé pokusy

Věta 1

Jestliže jev A nastane při jednom pokusu s pravděpodobností p , pak pravděpodobnost, že jev A nastane při n opakováních pokusu právě x -krát je

$$P = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (1)$$

$x = 0, 1, 2, \dots, n$.

Pro různá x dosazená do (1) vychází různé pravděpodobnosti. Je účelné zjistit, kterému x přísluší maximální pravděpodobnost, aniž bychom počítali pravděpodobnosti pro všechna x .

Věta 2

Označme k nejpravděpodobnější počet výskytů jevu A při n -násobném opakování pokusu. Pak platí

$$p \cdot (n + 1) - 1 \leq k \leq p(n + 1) \quad (2)$$

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při 8 hodech kostkou padne šestka třikrát? Kolikrát padne šestka s největší pravděpodobností?

Řešení:

Dosazením do vzorce (1) za $n = 8$, $x = 3$, $p = 1/6$ dostáváme

$$P = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{8-3} = 0,104$$

Pomocí vzorce (2) vymezíme interval, ve kterém je celé číslo k , určující nejpravděpodobnější výsledek

$$\frac{1}{6}(8+1) - 1 \leq k \leq \frac{1}{6}(8+1) \\ 0,5 \leq k \leq 1,5 \Rightarrow k = 1$$

6.2 Závislé pokusy

Typickým příkladem závislých pokusů je *výběr bez vracení*.

Věta 3

Je dán soubor N prvků, z nichž M má určitou vlastnost, takže $N-M$ prvků ji nemá.

Z N prvků se náhodně vybere n , z nichž se žádný nevrací zpět. Pravděpodobnost, že mezi n vybranými prvky má sledovanou vlastnost právě x prvků a $(n-x)$ ji nemá, je

$$P = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (3)$$

$$\max(0, M + n - N) \leq x \leq \min(M, n)$$

6.3 Souvislost nezávislých a závislých pokusů

Věta 4

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Význam věty 4 spočívá v tom, že pro velká N je možné nahradit vzorec (3) vzorcem (1), který je pro výpočet jednodušší.

Příklad (způsob výběru neovlivní výsledek)

Mezi 15 výrobky je 5 vadných. Náhodně vybereme 3. Jaká je pravděpodobnost, že jeden z vybraných je vadný, jestliže

- vybereme všechny 3 najednou ($P = 45/91$)
- vybíráme postupně po jednom bez vracení ($P = 45/91$)

Řešení:

a) Pro výpočet je vhodné zapsat si schematicky co je dáno a jaký výběr má být proveden:

$$\begin{array}{cc} 5 \text{ vadných} & 10 \text{ dobrých} \\ 1 \text{ vadný} & 2 \text{ dobré} \end{array}$$

Tak, jak jsou čísla zapsána pod sebou, se vytvoří kombinační čísla v čitateli. Ve jmenovateli je celkový počet nad počtem vybíraných:

$$\frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{45}{91}$$

b) Vybíráme-li postupně, jsou tři možnosti jak vybrat jeden vadný (V):

VDD + DVD + DDV a to s pravděpodobnostmi

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} + \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{91}$$

Z uvedeného je vidět, že je jedno, zda se vyberou výrobky postupně, bez vracení, nebo najednou všechny tři.



Shrnutí pojmů kapitoly 6

V této kapitole byly vysvětleny dvě velmi časté situace: opakované pokusy závislé a nezávislé, které jsou spojeny zejména se vzorci 1 a 3. Vzorec 1 lze použít k řešení několika typu úloh, jak je patrné z úlohy k procvičení č.1.



Otázky ke kapitole 6

1. Co se rozumí opakovanými nezávislými pokusy?
2. Co se rozumí opakovanými závislými pokusy?
3. Uveďte dva základní vzorce k opakovaným nezávislým pokusům.
4. Uveďte základní vzorec k výběru bez vracení.
5. Jaká je souvislost opakovaných nezávislých a závislých pokusů?
6. Uveďte příklad opakovaných nezávislých pokusů. Jaký je nejpravděpodobnější výsledek?
7. Uveďte příklad opakovaných závislých pokusů.



Úlohy ke kapitole 6

1. Družstvo pěti cyklistů je klasifikováno, jestliže alespoň tři jeho členové dojedou v časovém limitu. Jaká je naděje, že družstvo bude klasifikováno, dojede-li každý z cyklistů v časovém limitu s pravděpodobností 0,4 ?
2. Hráči A a B hrají šach. A porazí B s pravděpodobností 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že B vyhraje alespoň dvě ze čtyř partií?
3. Pravděpodobnost toho, že šachista vyhraje alespoň jednu ze tří partií je 0,973. Určete pravděpodobnost výhry právě v jedné partii.

4. Který ze dvou házenkářů A a B je lepší, jestliže A vstřelí branku ze sedmimetrového hodů s pravděpodobností 0,5 a B promění alespoň jeden ze tří hodů s pravděpodobností 0,936?

5. Je pravděpodobnější, že hráč A z předešlého příkladu promění dva ze tří trestných bodů nebo B tři z pěti trestných bodů?

6. Zařízení, které je sestaveno ze dvou elementů, je vyřazeno z provozu, porouchá-li se kterýkoliv z nich. S jakou maximální pravděpodobností se mohou porouchat jednotlivé elementy, aby pravděpodobnost, že zařízení bude vyřazeno z provozu, nepřekročila 0,75?



KLÍČ K ŘEŠENÍ

Řešení(1):

Pravděpodobnost, že z pěti cyklistů dojedou alespoň tři:

$$P = \binom{5}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 + \binom{5}{4} 0,4^4 \cdot 0,6 + \binom{5}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^0$$

Obecně: Pravděpodobnost, že z n cyklistů dojede

a) právě x :

$$P = \binom{n}{x} \cdot 0,4^x \cdot 0,6^{n-x} \quad p = 0,4 \quad q = 1 - p = 0,6$$

b) alespoň x :

$$P = \binom{n}{x} \cdot 0,4^x \cdot 0,6^{n-x} + \binom{n}{x+1} \cdot 0,4^{x+1} \cdot 0,6^{n-x-1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot 0,4^n \cdot 0,6^0$$

c) nejvýše x :

$$P = \binom{n}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^n + \binom{n}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^{n-1} + \dots + \binom{n}{x} \cdot 0,4^x \cdot 0,6^{n-x}$$

Řešení(2):

B vyhraje právě v jedné partii s pravděpodobností 0,3. Máme tedy $p = 0,3$, $n = 4$; potom

$$P = 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 \right] = 0,3483$$

nebo přímo:

$$P = \binom{4}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 + \binom{4}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^0 = 0,3483$$

Řešení(3):

V obecném vztahu:

$$\sum_{x=1}^n \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x} = P$$

hledáme p, když n = 3, proto

$$0,973 = 1 - \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 0,027 \Rightarrow q = 0,3 \Rightarrow p = 0,7$$

Řešení(4):

a) Pravděpodobnost, že B vstřelí branku při jednom hodu:

$$0,936 = 1 - \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 0,064 \Rightarrow q = 0,4 \Rightarrow p = 0,6$$

B je lepší (0,6) než A (0,5).

b) Pravděpodobnost, že A vstřelí aspoň jednu branku při třech bodech:

$$P = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0,5^3 = 0,875$$

nebo

$$P = \binom{3}{1} \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 + \binom{3}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 + \binom{3}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^0 = 0,875$$

A je slabší (0,875) než B (0,936).

Řešení(5):

a) $P = \binom{3}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = 0,375$

b) $P = \binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,3456$

Řešení(6):

Pravděpodobnost, že zařízení se porouchá, nesmí překročit 0,75

$$P = 1 - \binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot q^2 \leq 0,75 \Rightarrow q^2 \geq 0,25 \Rightarrow q \geq 0,5 \Rightarrow p \leq 0,5$$

7. NÁHODNÁ PROMĚNNÁ



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl

- a) definovat nejdůležitější pojem teorie pravděpodobnosti, kterým je náhodná proměnná
- b) ukázat popis náhodné proměnné pomocí tří funkcí

Výsledky některých pokusů (elementární jevy) jsou vyjádřeny čísly (např. hod kostkou), u některých však nikoliv (hod mincí: rub, líc). U takových pokusů je účelné přiřadit elementárním jevům čísla.

Toto přiřazení se provede pomocí funkce, definované na množině Ω .



Výklad

Definice 1 (náhodné proměnné)

Funkce X , definovaná na množině elementárních jevů Ω , se nazývá *náhodná proměnná* (také náhodná veličina).

$$X : \Omega \rightarrow M, \quad M \subset \mathbb{R}.$$

M je obor hodnot náhodné proměnné X .

Poznámka

Důvod takové definice plyne z následující úvahy.

Čísla, přiřazená elementárním jevům, tvoří *obor hodnot* proměnné X , kterou nazýváme náhodná proměnná, neboť nabývá svých hodnot nahodile, v závislosti na výsledku pokusu. Značí se $X, Y, \dots$.

Je tedy X určeno jednoznačně výsledkem pokusu = elementárním jevem. Proto je X funkcí elementárních jevů.

Podle oboru hodnot M dělíme náhodné proměnné na

- a) *diskrétní*: M je konečná nebo spočetná množina
- b) *spojité*: M je interval (přesná definice spojitě n.p. viz dále v def. 5).

K určení náhodné proměnné je potřeba stanovit její obor hodnot $x_1, \dots, x_n$ a pravděpodobnosti, se kterými tyto hodnoty nabývá $p_1, \dots, p_n$. Sestavme tyto údaje do tabulky

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Každé hodnotě x_i je přiřazena právě jedna hodnota p_i . Jedná se o tabulkové určení funkce, která se nazývá *pravděpodobnostní funkce*.

Dále uvedeme 3 funkce, umožňující popis náhodných proměnných. Výklad je proveden tak, že po každé definici (2,3,5) následuje věta (1,2,3) o vlastnostech definovaných funkcí.

Definice 2 (pravděpodobnostní funkce)

Nechť X je diskrétní náhodná proměnná s oborem hodnot M .

Funkce p , která každé hodnotě $x \in M$ přiřazuje pravděpodobnost $P(X = x)$, se nazývá *pravděpodobnostní funkce*. Její definiční rovnice je

$$p(x) = P(X = x).$$

Funkční hodnota v bodě x je pravděpodobnost, že X nabude hodnotu x .

Věta 1 (vlastnosti pravděpodobnostní funkce)

- a) $p(x) \geq 0$
- b) $\sum_x p(x) = 1$

Kromě pravděpodobnosti, že X nabude hodnotu x , často hledáme pravděpodobnost, že X je menší než jistá hodnota x , tedy $P(X < x)$.

Definice 3 (distribuční funkce)

Nechť X je náhodná proměnná s oborem hodnot M .

Funkce F , jež přiřazuje každému reálnému x pravděpodobnosti $P(X < x)$, se nazývá *distribuční funkce* a značí se $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Skutečnost, že náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$ zapisujeme

$$X \sim F(x)$$

Příklad 1 Sleduje se výsledek hodu kostkou. Náhodná proměnná představuje padnuvší číslo.

Napište rovnici pravděpodobnostní a distribuční funkce. Pravděpodobnostní a distribuční funkci určete také tabulkou

Řešení:

$$p(x) = \frac{1}{6}, \quad F(x) = \sum_{k \leq x} p(k)$$

x	1	2	3	4	5	6	$x \geq 6$
p(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
F(x)	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

Věta 2 (vlastnosti distribuční funkce)

- a) $0 \leq F(x) \leq 1$
- b) $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
- c) $F(x)$ je neklesající funkce
- d) $F(+\infty) = 1, \quad F(-\infty) = 0$

Definice 4 (o nezávislosti náhodných veličin)

Nechť

$$X \sim F_1(x), Y \sim F_2(y), F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Funkce $F_1(x)$, $F_2(y)$ se nazývají marginální, funkce $F(x, y)$ je simultánní distribuční funkce.

Podobně frekvenční funkce $f_1(x)$, $f_2(y)$ jsou marginální a $f(x, y)$ je simultánní frekvenční funkce.

Náhodné veličiny X a Y nazveme *nezávislé*, jestliže simultánní distribuční resp. frekvenční funkce je rovna součinu příslušných marginálních funkcí, tj.

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \text{ resp. } f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \text{ resp. } p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y).$$

Platí také obrácené tvrzení, tzn.: je-li $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ pak jsou X a Y nezávislé.

Definice 5 (spojité náhodné proměnné a hustoty pravděpodobnosti)

Náhodná proměnná X s distribuční funkcí $F(x)$ se nazývá spojitá náhodná proměnná, existuje-li reálná funkce $f(x) \geq 0$ taková, že pro všechna reálná x se dá $F(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1)$$

Funkce $f(t)$ se nazývá *hustota pravděpodobnosti* (stručně hustota) náhodné veličiny X .

Poznámka

Analogií ke vztahu (1) je pro diskrétní náhodné proměnné vztah

$$F(x) = \sum_{k < x} p(k) \quad (2)$$

Věta 3 (vlastnosti hustoty pravděpodobnosti)

a) Z derivace integrálu (1), který je funkcí horní meze, máme

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Je tedy $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$.

b) Protože

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

a zároveň $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, je

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

c) Speciálně

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(1) - F(0) = 1$$

Vztah c) je analogií k V₁ bodu b).

Věta 3 je důsledkem definice 5.

Poznámky ke konstrukci a významu $f(x)$

Funkce $f(x)$ je nejméně názorná z uvedených tří funkcí. Pro lepší představu uvedeme možnou konstrukci hustoty pravděpodobnosti.

Větu 2 bod b) lze zapsat také ve tvaru

$$P(x < X < x + \Delta) = F(x + \Delta) - F(x).$$

Zmenšováním intervalu Δ však nevypočítáme pravděpodobnost $P(X = x)$, neboť

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x < X < x + \Delta x) = 0$$

Je ale možné vypočítat pravděpodobnost připadající na jednotku délky intervalu Δ

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

a nyní zmenšovat interval Δ . Výsledkem je zápis, který představuje derivaci $F(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

Tento vzorec lze zapsat ve tvaru

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow$$

$$P(x < X < x + dx) = f(x)dx$$

což je *plocha* pod $f(x)$ nad dx .



Shrnutí pojmů kapitoly 7

V definici 1 byl zaveden nejdůležitější pojem teorie pravděpodobnosti – náhodná proměnná. V dalších definicích byly definovány postupně tři funkce: p , F a f , které slouží k popisu náhodné proměnné. Všimněte si, jak se zkomplikovala situace při určení (popisu) *náhodné proměnné* ve srovnání s *proměnnou*, tedy co způsobilo přidání slůvka *náhodná*. U každé z uvedených tří funkcí jsou uvedeny její vlastnosti, které jsou v dalším textu hojně používány. Věnujte jim proto náležitou pozornost. Vlastnosti je potřeba umět zpaměti.



Otázky ke kapitole 7

1. Definujte náhodnou proměnnou jako funkci. Co je definičním oborem?
2. Podle čeho dělíme náhodné proměnné
3. Jak rozdělujeme náhodné proměnné
4. Napište definiční rovnici funkce $p(x)$
5. Uveďte vlastnosti $p(x)$
6. Napište definiční rovnici funkce $F(x)$
7. Uveďte vlastnosti $F(x)$
8. Vyjádřete $F(x)$ pomocí $p(x)$
9. Definujte nezávislé náhodné veličiny
10. Vyjádřete $F(x)$ pomocí $f(x)$
11. Napište definiční rovnici funkce $f(x)$
12. Uveďte vlastnosti $f(x)$
13. Uveďte přesnou definici spojité náhodné proměnné a její důsledky
14. Vysvětlete konstrukci $f(x)$



Úlohy ke kapitole 7

1. Náhodná veličina X má obor možných hodnot $\{0, 2, 4, 6\}$. Jednotlivé hodnoty nabývá s pravděpodobností $p(x) = \frac{A}{x+1}$.

Určete konstantu A a pravděpodobnosti jevů: a) $X = 0$; b) $X < 4$; c) $X > 6$;
d) $0 < X < 6$; e) $0 \leq X \leq 6$

2. Ve studijní skupině je 18 studentů, z toho je 6 děvčat. Náhodně vybereme 4

Určete zákon rozložení pravděpodobností náhodné veličiny X , která značí výskyt dívek mezi vybranými studenty.

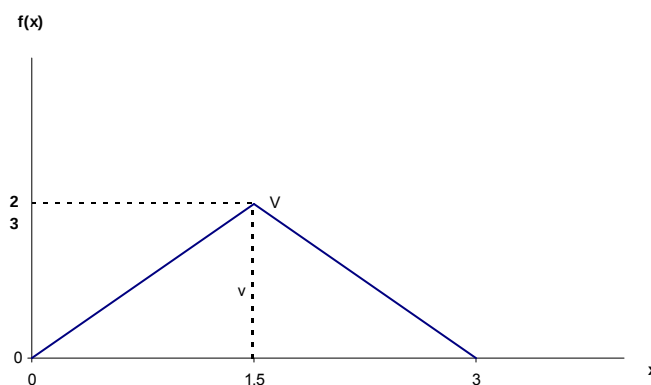
3. Která z následujících funkcí může být pravděpodobností funkcí náhodné veličiny X , je-li obor možných hodnot $x \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\text{a) } p_1(x) = \frac{1}{x}; \quad \text{b) } p_2(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2x+1}{2}; \quad \text{c) } p_3(x) = \frac{A}{1+x};$$

4. Mezi 7 výrobky jsou 4 nekvalitní. Náhodně vytáhneme 3 výrobky. Určete zákon rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X , která značí počet nekvalitních výrobků mezi vytaženými výrobky.

5. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobností určenou grafem (obr.).

Určete $F(x)$ a $P(2 < X < 3)$.



6. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobností

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + c & \text{pro } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 0 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

Určete konstantu c a ověřte, zda $P(-\infty < X < \infty) = 1$.

7. Náhodná proměnná X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 0; 4 \rangle$. Určete hustotu pravděpodobnosti, distribuční funkci a grafy obou funkcí.

8. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$F(x) = \begin{cases} A \cdot e^{-2x} & \text{pro } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

Určete konstantu A , $P(X < 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$.

9. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ Ax + B & \text{pro } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{pro } x \geq 4 \end{cases}$$

Určete konstanty A, B a hustotu pravděpodobnosti $f(x)$.

10. Ukažte, zda funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pro } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pro } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$

má základní vlastnosti hustoty pravděpodobnosti. Vypočtěte $P(-1 < X < 1)$.

11. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (4 - 2x) & \text{pro } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

Určete konstantu c .



KLÍČ K ŘEŠENÍ KAP. 7

Řešení(1):

Pro konstantu A vychází.

$$P(0) + P(2) + P(4) + P(6) = A\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = A \cdot \frac{176}{105} = 1 \Rightarrow A = \frac{105}{176} = 0,597$$

Dále máme:

$$a) P(X = 0) = P(0) = A \cdot 1 = \frac{105}{176} = 0,597;$$

$$b) P(X < 4) = P(0) + P(2) = A\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0,597 \cdot \frac{4}{3} = 0,796;$$

$$c) P(X > 6) = 0;$$

$$d) P(0 < X < 6) = P(2) + P(4) = A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 0,597 \cdot \frac{8}{15} = 0,318$$

$$e) P(0 \leq X \leq 6) = 1$$

Řešení(2):

Náhodná veličina X může nabývat hodnoty $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Proto

$$P(X = x) = p(x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{12}{4-x}}{\binom{18}{4}}$$

Řešení(3):

a) $p_1(0)$ není definována;

b) $p_2(x) = \sum_{i=0}^3 p(x_i) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right) = 1 \Rightarrow p_2(x)$ vyhovuje;

c) $p_3(x) = A \cdot \sum_{i=0}^3 \frac{1}{1+x} = 1 \Rightarrow A \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow A = \frac{12}{15}$

Potom $\sum_{i=0}^3 p(x_i) = 1$.

Řešení(4):

Náhodná veličina X má obor možných hodnot $\{0, 1, 2, 3\}$.

Pravděpodobnostní funkce má tvar

$$p(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}$$

Řešení(5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\frac{3 \cdot v}{2} = 1 \Rightarrow v = \frac{2}{3} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right).$$

Rovnice přímky určené body $0(0; 0)$, $V\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$ nad intervalem $\langle 0; 1; 5 \rangle$ má tvar: $y = \frac{4}{9}x$;

rovnice přímky pro body $\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$, $(3; 0)$ nad intervalem $\langle 1; 5; 3 \rangle$ je $y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{4}{9}x & \text{pro } x \in \langle 0; 1,5 \rangle \\ -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} & \text{pro } x \in \langle 1,5; 3 \rangle \\ 0 & \text{pro } x > 3 \end{cases}$$

Protože $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$, vychází

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \int_0^x \frac{4}{9}x \, dx = \frac{2}{9}x^2 & \text{pro } x \in \langle 0; 1,5 \rangle \\ \int_0^{1,5} \frac{4}{9}x \, dx + \int_{1,5}^x \left(-\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}\right)dx = \left[\frac{4x^2}{18}\right]_0^{3/2} - \left[\frac{4x^2}{18}\right]_{3/2}^x + \left[\frac{4x}{3}\right]_{3/2}^x = -\frac{4x^2}{18} + \frac{4x}{3} - 1, & x \in \langle 1,5; 3 \rangle \\ \int_0^{1,5} \frac{4}{9}x \, dx + \int_{1,5}^x \left(-\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}\right)dx + \int_3^x 0 \, dx = 1, & x > 3 \end{cases}$$

Dále

$$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \left[-\frac{4x^2}{18} + \frac{4x}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{9}$$

Nebo jinak $\int_2^3 \left(-\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}\right)dx = \frac{2}{9}.$

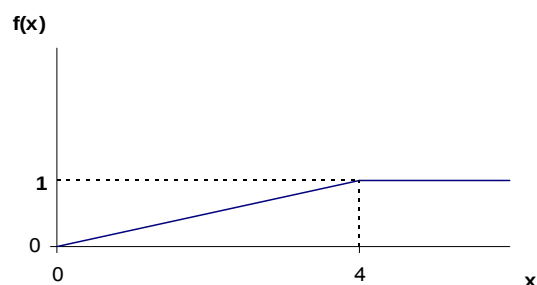
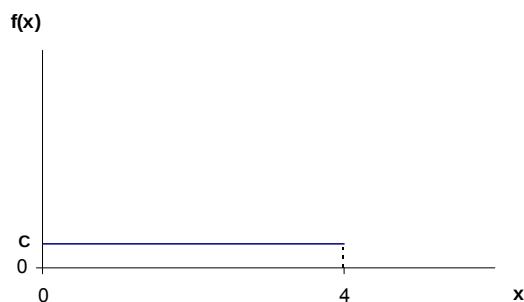
Řešení(6):

$$\int_{-2}^2 (-x^2 + c) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + cx\right]_{-2}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 2c\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2c\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{19}{12}.$$

Řešení(7):

$$\int_0^4 c \, dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x \in \langle 0; 4 \rangle \\ 0 & \text{pro } x > 4 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0 & \text{pro } x < 0 \\ P(X < x), \text{ kde } x \in \langle 0; 4 \rangle \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^x \frac{1}{4} dx = \frac{x}{4} & \text{pro } x \in \langle 0; 4 \rangle \\ \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^4 \frac{1}{4} dx + \int_4^x 0 \cdot dx = 1 & \text{pro } x > 4 \end{cases}$$

Řešení(8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 e^{-2x} dx + \int_2^{\infty} 0 \cdot dx = 1$$

$$A \cdot \int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow A \cdot \int_0^2 e^{-2x} dx = A \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^2 = \frac{A}{2} [1 - e^{-4}] \Rightarrow A = \frac{2}{1 - e^{-4}}.$$

$$P(X < 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{1 - e^{-4}} e^{-2x} dx = -\frac{1}{1 - e^{-4}} [e^{-2x}]_0^1 = \frac{e^2(e^2 - 1)}{e^4 - 1} = \frac{e^2}{1 + e^2}.$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{0,5}^2 \frac{2}{1 - e^{-4}} e^{-2x} dx = -\frac{1}{1 - e^{-4}} (-e^{-4} + e^{-1}) = \frac{e^3 - 1}{e^4 - 1}.$$

9. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ Ax + B & \text{pro } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{pro } x \geq 4 \end{cases}$$

Řešení(9):

$F(x)$: $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

$$F(-\infty) = F(0) = B = 0; F(+\infty) = F(4) = A = 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x & \text{pro } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{pro } x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pro } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{pro } x \geq 4 \end{cases}$$

Řešení(10):

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx + \int_0^2 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = -\frac{2}{6} + \frac{2}{3} - \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = 1.$$

$$P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{5}{6}.$$

Řešení(11):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^2 c \cdot (4 - 2x) dx + \int_2^{\infty} 0 \cdot dx = c \cdot \int_0^2 (4 - 2x) dx = c[8 - 4] = 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

8. ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH PROMĚNNÝCH



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl

- a) provést klasifikaci číselných charakteristik
- b) definovat obecné a centrální momentové charakteristiky
- c) objasnit podstatu čtyř základních momentových charakteristik a jejich vlastnosti

Náhodná proměnná je jednoznačně určena svým zákonem rozdělení pravděpodobnosti. Tento způsob popisu je však pro praktické potřeby často nevyhovující. Proto při aplikacích shrnujeme informace o náhodné proměnné do několika čísel, které ji dostatečně charakterizují. Tato čísla se nazývají číselné charakteristiky.



Výklad

Číselné charakteristiky se rozdělují

- 1) podle toho, *které vlastnosti rozdělení charakterizují:*
 - a) charakteristiky polohy
 - b) charakteristiky variability
 - c) charakteristiky šikmosti (symetrie)
 - d) charakteristiky špičatosti (excesu)
- 2) podle *způsobu konstrukce*
 - a) momentové
 - b) kvantilové
 - c) ostatní

8.1 Momentové charakteristiky

Definice 1

Nechť X je náhodná proměnná. Její *střední hodnota* se značí EX a je definována pro spojité X vztahem

$$EX = \mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (1)$$

Pro diskrétní X je

$$EX = \mu_1 = \sum_x x p(x) \quad (2)$$

Definice 2

k-tým *obecným* momentem náhodné proměnné X, který značíme μ_k , nazýváme číslo, definované vztahem

a) pro diskrétní náhodné proměnné

$$\mu_k = EX^k = \sum_x x^k p(x)$$

b) pro spojitě náhodné proměnné

$$\mu_k = EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

Definice 3

k-tým *centrálním* momentem náhodné proměnné X, který značíme ν_k (ní), nazýváme číslo, definované vztahem

a) pro diskrétní náhodné proměnné (symbol, definiční rovnice, výpočtový vzorec)

$$\nu_k = E(X - EX)^k = \sum_x (x - \mu_1)^k p(x)$$

b) pro spojitě náhodné proměnné

$$\nu_k = E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^k f(x) dx$$

Prakticky se používají tyto čtyři momenty:

a) První obecný moment

$$\mu_1 = EX = \sum_x x p(x)$$

resp.

$$\mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

EX je *střední hodnota* náhodné veličiny X ; je to charakteristika polohy.

Vlastnosti střední hodnoty

- 1) $E_k = k$, je-li k konstanta
- 2) $E_k.X = k.EX$
- 3) $E(X+Y) = EX + EY$
- 4) Jsou-li X a Y nezávislé, pak $E(X.Y) = EX . EY$

b) Druhý centrální moment

$$\nu_2 = E(X - EX)^2 = \sum (x - \mu_1)^2 p(x)$$

resp.

$$\nu_2 = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^2 f(x) dx$$

který představuje rozptyl (disperzi) náhodné proměnné X . Značí se také DX resp. σ^2 .

Vlastnosti rozptylu:

- 1) $Dk = 0$
- 2) $Dk.X = k^2.DX$
- 3) Pro nezávislé X a Y je $D(X+Y) = DX + DY$

Rozptyl je charakteristikou variability.

Definice 4 (další charakteristiky variability)

Směrodatná odchylka σ je odmocnina z rozptylu

$$\sigma = \sqrt{DX} . \tag{3}$$

Variační koeficient je definován vztahem

$$\nu = \frac{\sigma}{\mu_1} ; \tag{4}$$

ν je bezrozměrnou charakteristikou variability.

c) Třetí centrální moment

$$\nu_3 = E(X - EX)^3 = \sum_x (x - \mu_1)^3 p(x)$$

resp.

$$\nu_3 = E(X - EX)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^3 f(x) dx$$

(5)

se používá pro výpočet *šikmosti*.

Definice 5

Šikmost je definována vztahem

$$\gamma_1 = \frac{\nu_3}{\sigma^3}$$

(6)

Popisuje symetrii rozdělení vzhledem ke střední hodnotě.

Vlastnosti šikmosti

U symetrických rozdělení je $\gamma_1 = 0$; je-li $\gamma_1 < 0$ hovoříme o sešikmení vlevo, $\gamma_1 > 0$ znamená sešikmení vpravo.

d) čtvrtý centrální moment pro diskrétní X

$$\nu_4 = E(X - EX)^4 = \sum (x - \mu_1)^4 p(x)$$

(7)

resp. (pro spojitou náhodnou proměnnou X)

$$\nu_4 = E(X - EX)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^4 f(x) dx ;$$

γ_2 se používá k výpočtu *špičatosti*

Definice 6

Špičatost je definována vztahem

$$\gamma_2 = \frac{\nu_4}{\sigma^4}$$

(8)

Špičatost se hodnotí srovnáním se špičatostí Gaussovy křivky (normální rozdělení, viz dále), kde je $\gamma_2 = 3$.

Věta 1 (vlastnosti špičatosti)

$$\gamma_2(X) = \gamma_2(aX + b) \quad (9)$$

Vyjádření centrálních momentů pomocí obecných momentů

Libovolný centrální moment lze vyjádřit pomocí obecných momentů.

Věta 2 (o vztahu centrálních a obecných momentů)

$$\nu_k = \binom{k}{0} \mu_k - \binom{k}{1} \mu_{k-1} \cdot \mu_1 + \binom{k}{2} \mu_{k-2} \cdot \mu_1^2 - \binom{k}{3} \mu_{k-3} \cdot \mu_1^3 + \dots \pm \binom{k}{k} \mu_1^k$$

Odtud

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$\nu_3 = \mu_3 - 3\mu_1 \cdot \mu_2 + 2\mu_1^3$$

$$\nu_4 = \mu_4 - 4\mu_3 \mu_1 + 6\mu_2 \mu_1^2 - 3\mu_1^4$$

8.2 Kvantily

Definice 7

Kvantily jsou hodnoty *kvantilové funkce* F^{-1} definované vztahem

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, 0 < u < 1$$

kde F je distribuční funkce. Hodnotě $F^{-1}(p)$ říkáme p -kvantil a značíme x_p .

Je-li F rostoucí funkce, potom p kvantil je takové číslo, že

$$F(x_p) = p \quad \text{tj.} \quad F^{-1}(p) = x_p$$

Funkce F^{-1} se označuje také Q , takže $F^{-1} = Q$.

Věta 3 (vlastnosti kvantilů)

Je-li $f(x)$ sudá funkce a $F(x)$ spojitá a rostoucí funkce, potom

$$x_p = -x_{1-p} \quad (10)$$

pro $0 < p < 1$.

Kvantily jsou základní stavební jednotkou tzv. kvantilových charakteristik.

Charakteristikou polohy je kvantil $x_{0,5}$, který se nazývá *medián* a často se také značí $\tilde{x}$.

Kvantilovou charakteristikou variability je např. rozdíl $x_{0,75} - x_{0,25}$, tzv. *kvadrilové rozpětí*; $x_{0,75}$ resp. $x_{0,25}$ je horní resp. dolní kvantil.

Existují také kvantilové charakteristiky šikmosti a špičatosti, ty ale nebudeme uvádět.

**Shrnutí kapitoly 8**

V této kapitole jsme uvedli druhý způsob popisu náhodných proměnných – pomocí číselných charakteristik. Po definicích obecných a centrálních momentů k -tého řádu byly uvedeny čtyři prakticky používané momenty: střední hodnoty, rozptyl, šikmost a špičatost i s jejich vlastnostmi. Dále byl definován p -kvantil.

**Otázky k e kapitole 8**

1. Uveďte dva zásadní způsoby popisu náhodné proměnné
2. Jak rozdělujeme číselné charakteristiky
3. Jak rozdělujeme momentové charakteristiky
4. Které momentové charakteristiky se prakticky používají nejčastěji
5. Uveďte vlastnosti střední hodnoty
6. Uveďte vlastnosti rozptylu
7. Napište k -tý počáteční (centrální) moment pro diskrétní X
8. Napište k -tý počáteční (centrální) moment pro spojitou náhodnou proměnnou
9. Uveďte čtyři charakteristiky variability
10. Jak se vyhodnocuje šikmost
11. Jak se vyhodnocuje špičatost
12. Vyjádřete druhý (třetí) centrální moment pomocí počátečních momentů
13. Definiujte p -kvantil
14. Uveďte vlastnost kvantitu pro $f(x)$ sudou a $F(x)$ spojitou rostoucí funkci



Úlohy ke kapitole 8

1. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

x	1	2	3	4
$p(x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

Určete střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .

2. Je dána hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ x+1 & \text{pro } -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

Určete střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .

3. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pro } -1 \leq x < 0 \\ -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$$

Určete střední hodnotu náhodné veličiny X .

4. Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$. Určete hustotu pravděpodobnosti, střední hodnotu a rozptyl.

5. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{pro } -1 \leq x < 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

6. Určete střední hodnotu, rozptyl a distribuční funkci náhodné veličiny X, je-li

$$f(x) = \frac{3}{x^4} \text{ pro } x > 1, \text{ pro ostatní } x \text{ je } f(x) = 0.$$



KLÍČ K ŘEŠENÍ

Řešení(1):

Poněvadž X je diskrétní náhodná veličina, platí podle definice střední hodnoty

$$\mu = 1.0,2 + 2.0,4 + 3.0,3 + 4.0,1 = 2,3$$

Pro rozptyl vychází podle definice jakožto pro moment 2.řádu

$$\sigma^2 = 1.0,2 + 4.0,4 + 9.0,3 + 16.0,1 - 2,3^2 = 0,81$$

Řešení(2):

a)

$$\mu = \int_{-1}^0 x(x+1)dx + \int_0^1 x(-x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0$$

b)

$$\mu = \int_{-1}^0 x^2(x+1)dx + \int_0^1 x^2(-x+1)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Řešení(3):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{-1}^0 x \left(\frac{2}{3} x \frac{2}{3} \right) dx + \int_0^2 x \left(-\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right) dx + \int_2^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \\ &= 0 + \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Řešení(4):

Poněvadž jde o rovnoměrná rozdělení vypočteme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 \cdot dx + \int_1^3 k \cdot dx + \int_3^{\infty} 0 \cdot dx = \int_1^3 k \cdot dx = 1 \Rightarrow k[x]_1^3 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Rovnice $f(x)$ má potom tvar :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1 \\ 0,5 & \text{pro } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{pro } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\mu = \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^3 x \cdot \frac{1}{2} dx + \int_3^{\infty} x \cdot 0 dx = 2$$

$$\sigma^2 = \int_1^3 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx - 2^2 = \frac{1}{3}$$

Řešení(5):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ x+1 & \text{pro } -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

Odtud

$$\mu = \int_{-1}^0 x(x+1)dx + \int_0^1 x(-x+1)dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-1}^0 (x-0)^2(x+1)dx + \int_0^1 (x-0)^2(-x+1)dx = \frac{1}{6}$$

Řešení(6):

$$\mu = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4} dx = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_1^{\infty} (x-0)^2 \cdot \frac{3}{x^4} dx = \frac{3}{4}$$

Distribuční funkce má rovnici

$$F(x) = \int_1^x \frac{3}{x^4} dx = 1 - \frac{1}{x^3}$$

9. DŮLEŽITÉ TYPY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíle

- a) definovat nejčastěji používaná rozdělení pravděpodobnosti
- b) ukázat konstrukci a vlastnosti významných rozdělení
- c) ukázat vliv parametrů na tvar rozdělení

Protože některé typy funkcí $p(x)$ resp. $f(x)$ jsou zvláště důležité, mají speciální pojmenování a označení a jejich hodnoty jsou tabelovány. Některé z těchto funkcí uvedeme.



Výklad

9.1 Důležité typy rozdělení pro diskrétní náhodné veličiny

1) Binomické rozdělení $Bi(n,p)$:

$$X \sim Bi(n,p) \Leftrightarrow p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Tento zápis čteme:

Náhodná proměnná X má binomické rozdělení s parametry n, p právě když pravděpodobnostní funkce má danou rovnici. Dále budeme používat jen symbolický zápis.

n = počet opakování pokusu,

p = pravděpodobnost, se kterou nastane sledovaný jev při jednom pokusu.

Věta 1

U binomického rozdělení platí:

- a) $E(X) = n \cdot p$
- b) $D(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Momentová vytvořující funkce: $y(t) = (1 - p + pe^t)^n$

Například náhodná veličina X , představující počet padnuvších šestek při deseti hodech kostkou, má rozdělení $Bi(10, 1/6)$.

Její obor hodnot je množina $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ a pravděpodobnostní funkce má rovnici

$$p(x) = \binom{10}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-x}$$

Charakteristiky EX a DX vypočítáme podle věty 1:

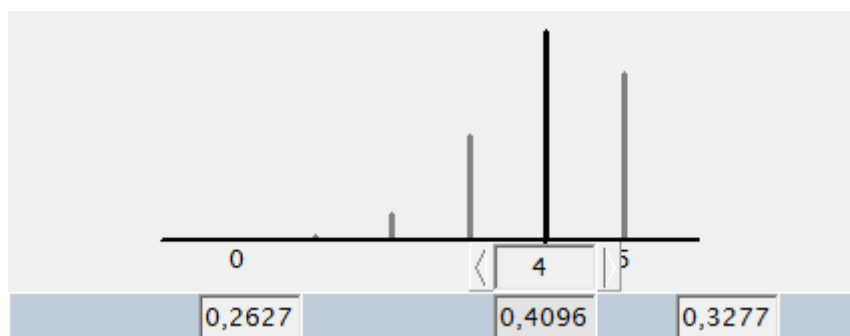
$$EX = 10 \cdot (1/6) \text{ a } DX = 10(1/6)(5/6)$$

Vliv parametrů n, p na tvar $p(x)$ ukážeme na několika grafech s různými parametry n, p .

$Bi(5; 0,8)$

Údaje v grafu:

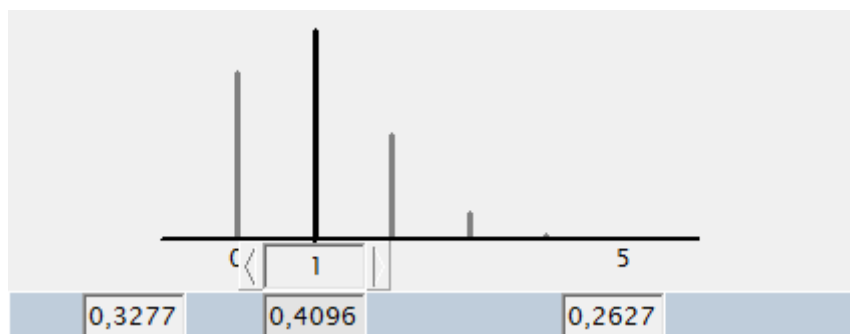
$$P(X=4) = 0,4096; P(X < 4) = 0,2627; P(X > 4) = 0,3277$$



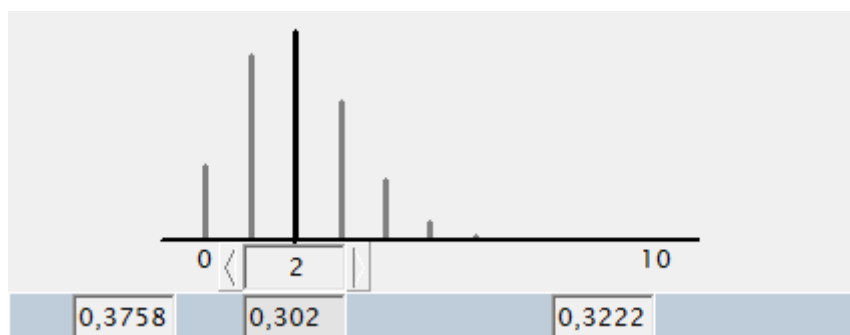
$Bi(5; 0,4)$



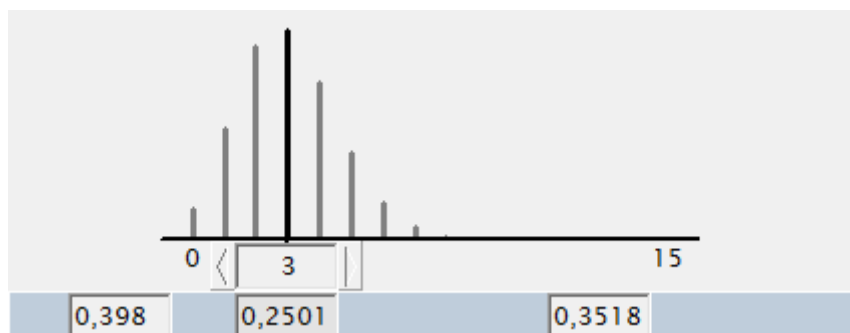
Bi(5;0,2)



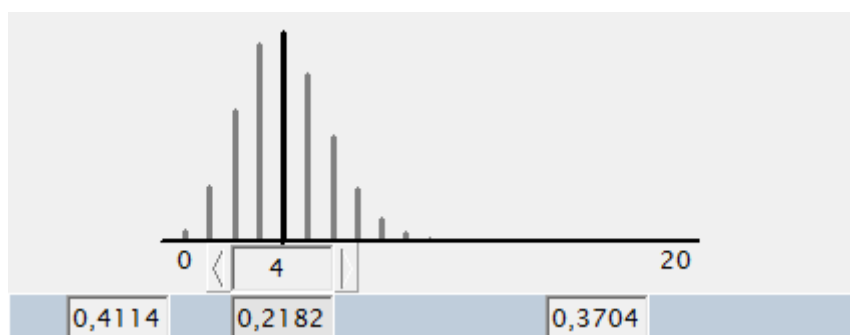
Bi(10;0,2)



Bi(15;0,2)



Bi(20;0,2)



2) Alternativní rozdělení $A(p)$:

$$X \sim A(p) \Leftrightarrow p(x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

Je to rozdělení náhodné veličiny, která může nabývat jen dvě hodnoty: sledovaný jev *nastal* s p-stí p nebo *nenastal* s p-stí $1 - p$.

$A(p)$ je případem $Bi(n, p)$ pro $n = 1$. Pak obor hodnot X je $\{0, 1\}$.

3) Rovnoměrné rozdělení $R(n)$:

$$X \sim R(n) \Leftrightarrow p(x) = 1/n$$

$$x = 1, 2, \dots, n$$

Chceme-li vymežit, jakých hodnot n nabývá, lze použít jinou rovnici

$$p(x) = 1/(N-M+1), \quad x = M, \dots, N$$

Např. pro čtyři hodnoty ($n = 4$): 5, 6, 7 a 8 je $M = 5$, $N = 8$
a rovnice $p(x)$ bude

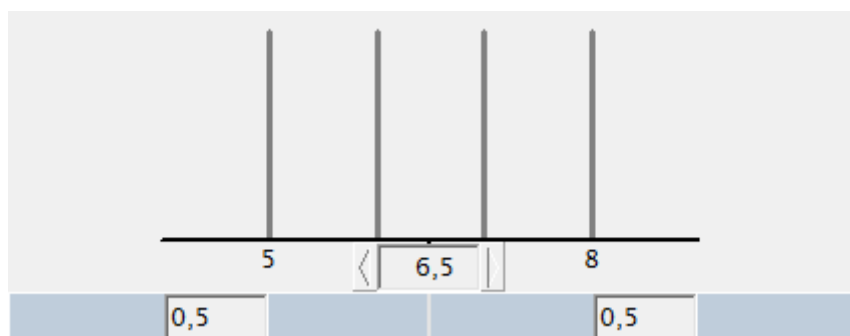
$$p(x) = 1/(8 - 5 + 1) = 1/4$$

$$EX = (M + N)/2 = 6,5$$

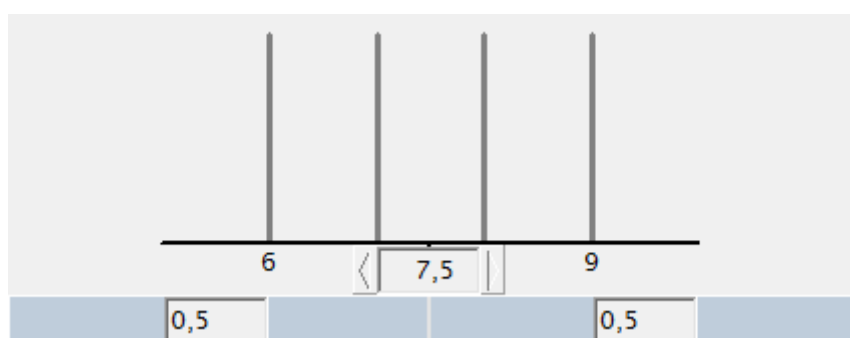
$$DX = (N-M)(N-M+2)/12 = 1,25$$

Rovnice $p(x)$ pro různá n

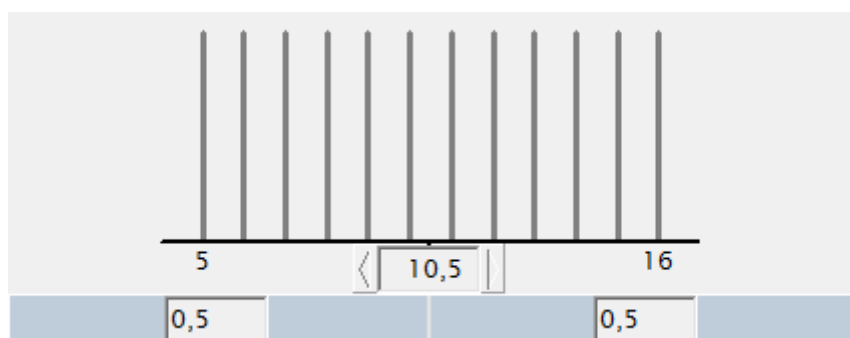
R(4) pro $M = 5$ a $N = 8$



R(4) pro $M = 6$ a $N = 9$



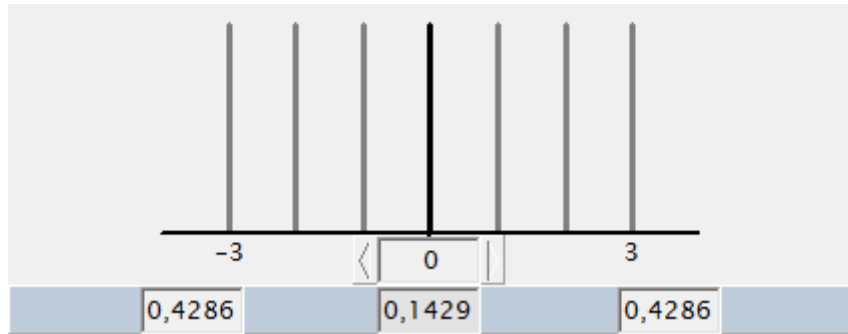
R(16) pro $M = 5$ a $N = 16$



$$EX = (M + N)/2 = 10,5$$

$$DX = (N-M)(N-M+2)/12 = 11,9$$

R(7) pro $M = -3$ a $N = 3$



$$EX = (M + N)/2 = 0$$

$$DX = (N-M)(N-M+2)/12 = 4$$

4) Hypergeometrické rozdělení $H(N, M, n)$:

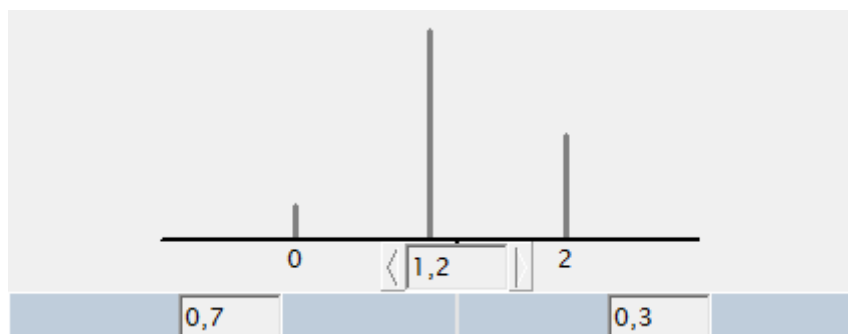
$$X \sim H(N, M, n) \Leftrightarrow p(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\max(0, M + n - N) \leq x \leq \min(M, n)$$

$$EX = \frac{nM}{N}, DX = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{nM}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

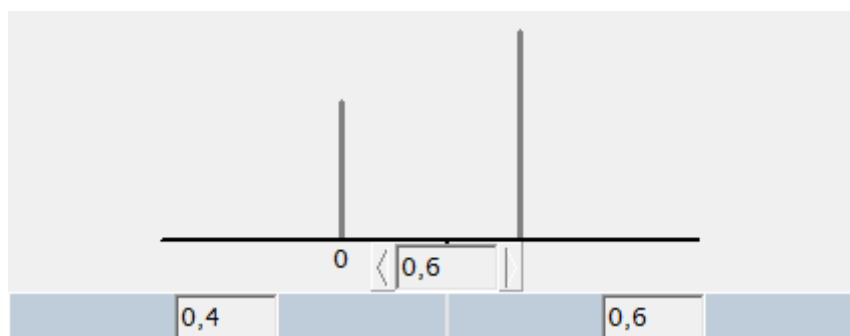
Vliv parametrů na $p(x)$

$$H(5, 3, 2); EX = \frac{2 \cdot 3}{5} = 1,2; DX = \frac{5-2}{5-1} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 0,36$$



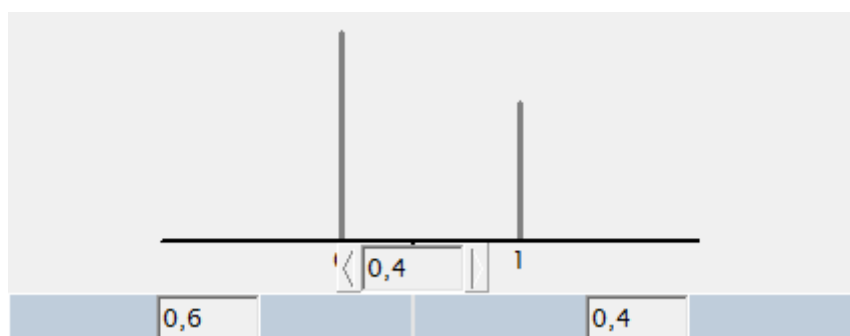
$$p(x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5-3}{2-x}}{\binom{5}{2}}$$

H(5,3,1)



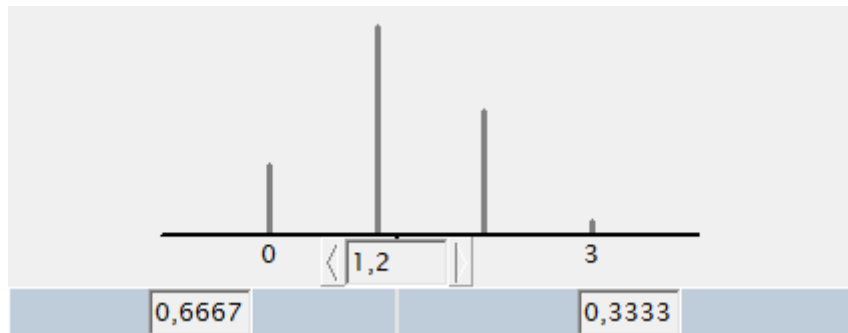
$$p(x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5-3}{1-x}}{\binom{5}{1}}$$

H(5,2,1)



$$p(x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5-3}{2-x}}{\binom{5}{2}}$$

$H(10,4,3)$



$$p(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{10-4}{3-x}}{\binom{10}{3}}$$

5) Poissonovo rozdělení $Po(a)$

$$X \sim Po(a) \Leftrightarrow p(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

$x = 0, 1, 2, \dots$

Momentová vytvořující funkce $y(t) = \exp[a(e^t - 1)]$

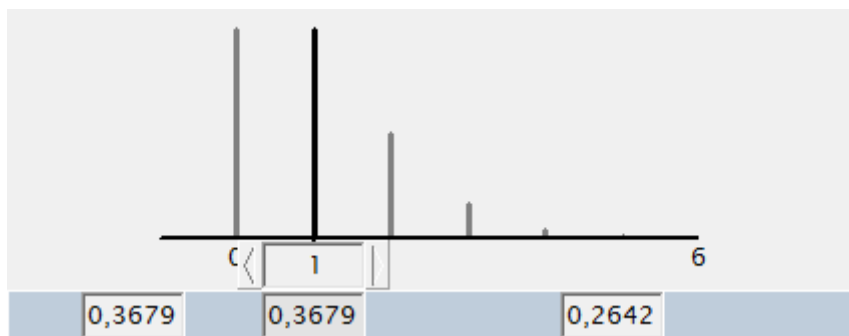
Např. $y'(0) = a = E(X)$

Vliv parametrů na $p(x)$

Pravděpodobnostní funkce pro $Po(1)$: $p(x) = \frac{1^x}{x!} e^{-1}$

$p(0) = p(1) = 0,3679$;

Pravděpodobnosti všech zbývajících možností souhrnně: tj. $p(2) + p(3) + p(4) + \dots = 1 - p(0) - p(1) = 0,2642$

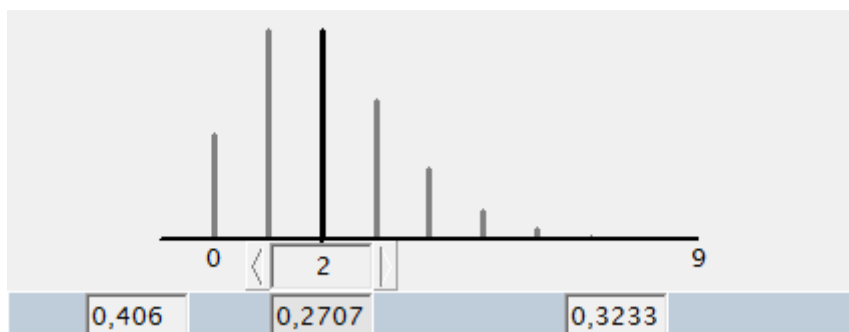


$$X \sim \text{Po}(2): p(x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2}$$

$$p(0) = 0,406; p(1) = p(2) = 0,2707;$$

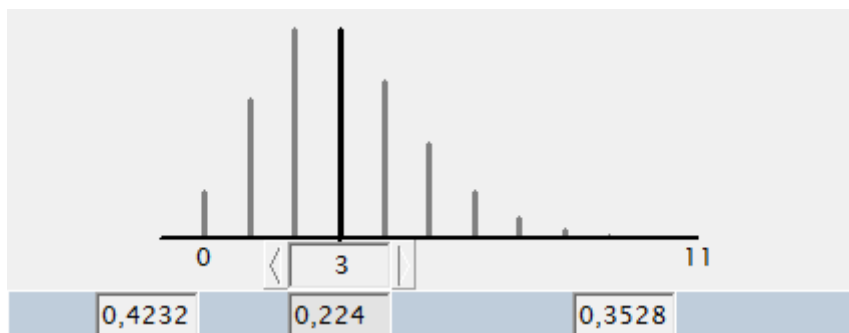
ostatní výsledky souhrnně, tj. $p(3) + p(4) + \dots$

mají pravděpodobnost 0,3233.



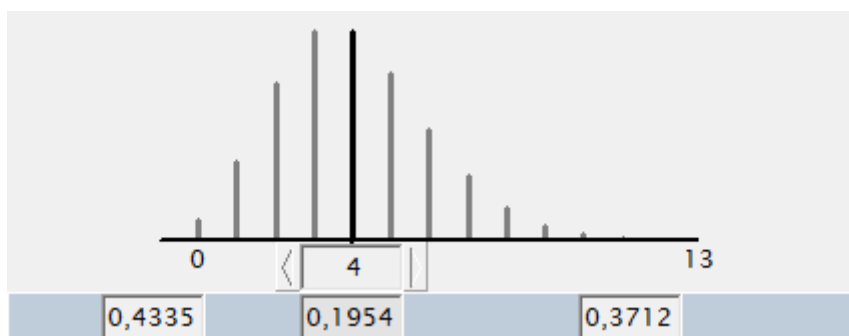
$$X \sim \text{Po}(3): p(x) = \frac{3^x}{x!} e^{-3}$$

$p(0) = 0,4232$; $p(3) = 0,2240$; ostatní výsledky souhrnně, tj. $p(4) + p(5) + \dots$ mají pravděpodobnost $1 - p(0) - p(1) - p(2) - p(3) = 0,3528$.



$$X \sim \text{Po}(4): p(x) = \frac{4^x}{x!} e^{-4}$$

$p(0) = 0,4335$; $p(4) = 0,1954$; výsledky pro $X > 4$, tj. $p(5) + p(6) + \dots$ mají pravděpodobnost 0,3712.



Věta 2

U Poissonova rozdělení platí: $E(X) = D(X) = a$.

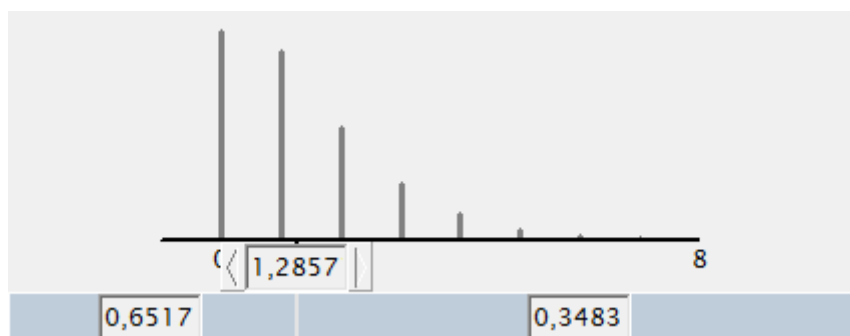
6. Negativně binomické rozdělení (Pascalovo) $\text{Psc}(n,p)$

Jev A je jedním z možných výsledků sledovaného náhodného pokusu a nastane při jednom pokusu s pravděpodobností p . Pokus je opakován, dokud jev A nenastane n -krát. Náhodná veličina X , představující počet neúspěšných pokusů, má pravděpodobnostní funkci

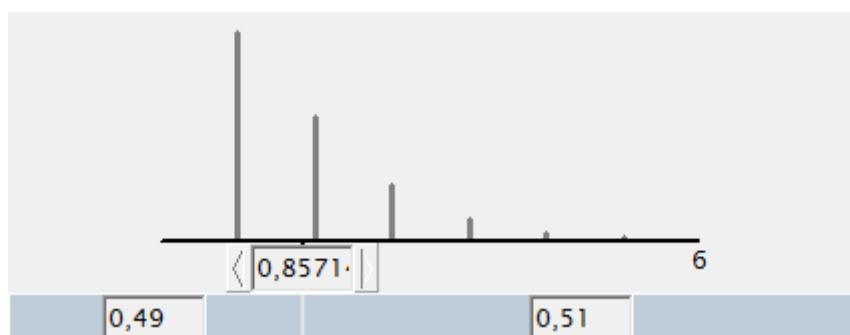
$$X \sim \text{Psc}(n,p) \Leftrightarrow p(x) = \binom{n+x-1}{x} p^n (1-p)^x$$

$$n = 1, 2, \dots; x = 0, 1, \dots;$$

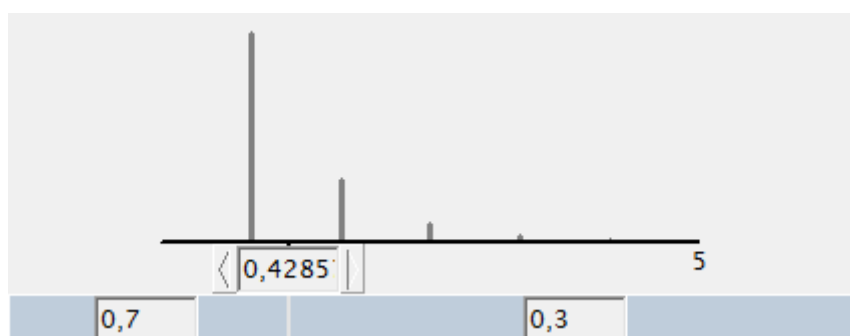
Psc(3;0,7)



Psc(2;0,7)



Psc(1;0,7)



7. Geometrické rozdělení $G(p)$

Pro speciální případ $n = 1$ u rozdělení $Psc(n,p)$ dostáváme rozdělení geometrické, které má pravděpodobnostní funkci

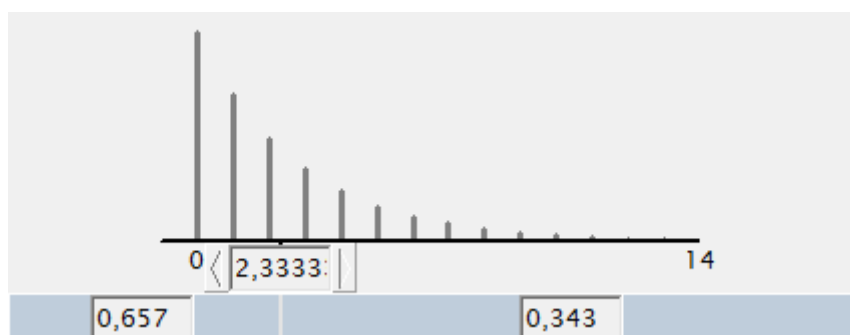
$$X \sim G(p) \Leftrightarrow p(x) = p (1 - p)^x$$

$x = 0, 1, \dots;$

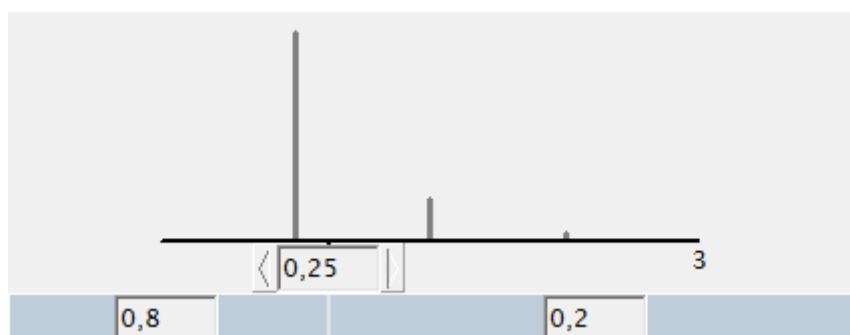
Momentová vytvořující funkce $y(t) = p / [1 - (1 - p)\exp(t)]$

Vliv parametrů na tvar $p(x)$

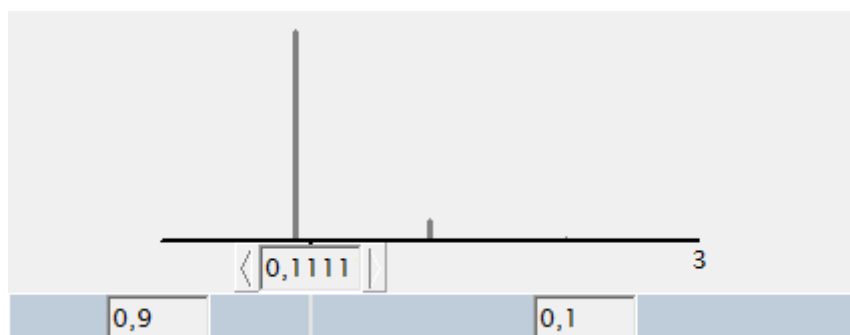
$G(0,3)$



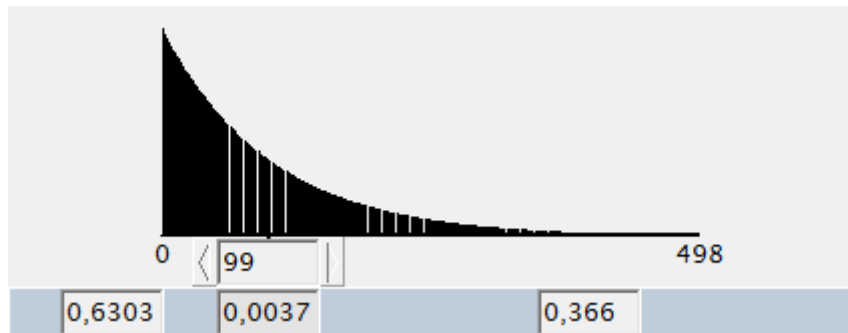
$G(0,8)$



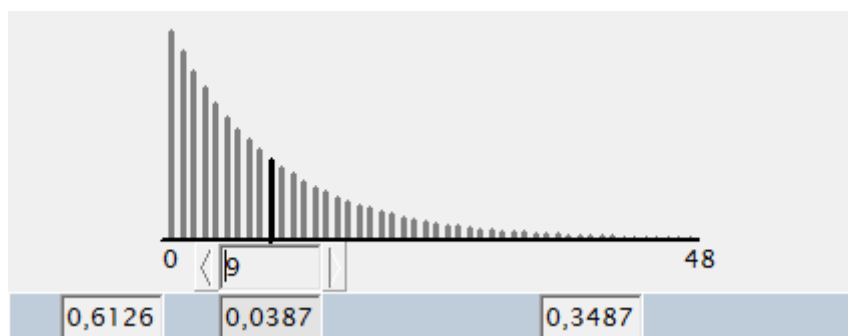
$G(0,1)$



G(0,01)



G(0,1)



Aproximace rozdělení

H lze aproximovat pomocí Bi, je-li N výrazně větší než n:

stačí, aby $n/N < 0,1$.

Bi se aproximuje pomocí Po, je-li $n > 10$ a $p < 0,1$.

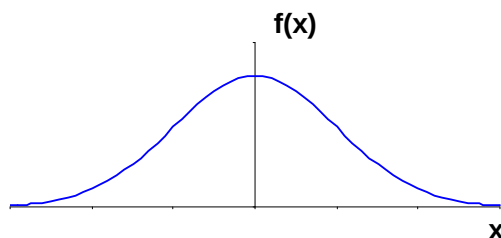
9.2 Důležité typy rozdělení pro spojité náhodné veličiny

1) Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$x \in (-\infty, \infty)$.

Grafem funkce $f(x)$ je *Gaussova křivka* (obr.1):



Obr.1 Gaussova křivka

Distribuční funkce bude mít rovnici

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Speciálně pro parametry $\mu = 0$, $\sigma = 1$ dostáváme $N(0, 1)$, to je tzv. *standardní* (normované) *normální rozdělení*. Distribuční funkce se zde značí $\Phi(x)$.

Věta 3 (Vztah $F(x)$ a $\Phi(x)$)

Mezi funkcemi $F(x)$ a $\Phi(x)$ platí vztah

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Tento vzorec umožňuje nalézt v tabulkách hodnoty $F(x)$ pro normální rozdělení s libovolnými parametry μ , σ^2 .

Kvantily normálního rozdělení

Značení: $x_p \dots$ pro $N(\mu, \sigma^2)$, $u_p \dots$ pro $N(0, 1)$.

Věta 4 (vztah x_p a u_p)

Mezi kvantitami x_p a u_p platí vztah

$$x_p = \sigma \cdot u_p + \mu.$$

Pro rozdělení $N(0, 1)$ jsou kvantily u_p tabelovány. Pro jiné parametry normálního rozdělení poslouží uvedený vzorec.

Příklad

Náhodná proměnná X má normální rozdělení s parametry

$\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$, symbolicky: $X \sim N(3, 4)$.

Určete pravděpodobnost, s jakou bude X nabývat hodnoty větší než 5, tj. $P(X > 5)$.

Řešení:

Pro určení pravděpodobnosti vycházíme z definice distribuční funkce:

$P(X < x) = F(x)$. Zde se má ale určit $P(X > 5)$. Proto se použije vztah $P(X > x) = 1 - P(X < x)$. Hodnoty distribuční funkce jsou udávány v tabulkách pouze pro standardní normální rozdělení. Proto se dále počítá podle:

$$P(X > x) = 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5 - 3}{2}\right) = 1 - \Phi(1)$$

V tabulkách distribuční funkce standardního normálního rozdělení se nalezne požadovaná hodnota $\Phi(1) = 0,84134$.

Hledaná pravděpodobnost je

$$P(X > 5) = 1 - 0,84134 = 0,15866.$$

Příklad

Vypočítat pravděpodobnost $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

Řešení:

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

Výsledek znamená, že v uvedeném intervalu se nachází 99,73% hodnot náhodné veličiny, která má normální rozdělení, tedy téměř všechny. Tento poznatek, nazývaný *pravidlo 3sigma*, má široké aplikace, např. při hodnocení způsobilosti procesů, u regulačních diagramů, při hodnocení odlehých hodnot a další.

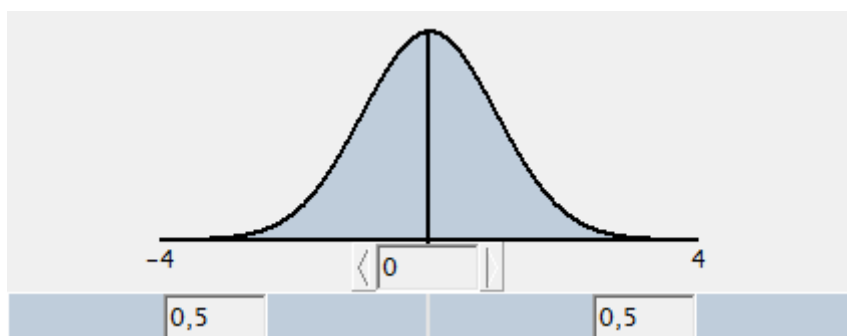
U jiných rozdělení však pravidlo 3σ nelze použít. Ukážeme to dále pro rovnoměrné rozdělení.

Vliv parametrů na tvar $f(x)$

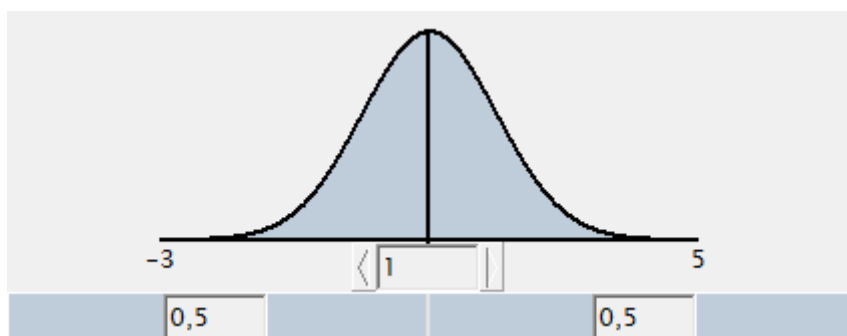
a) $X \sim N(\mu, 1)$; při rozptylu σ^2 je délka intervalu, ve kterém se X nachází s pravděpodobností blízkou 1, rovna 8.

Všimněte si, že i když se mění μ , délka intervalu zůstává 8.

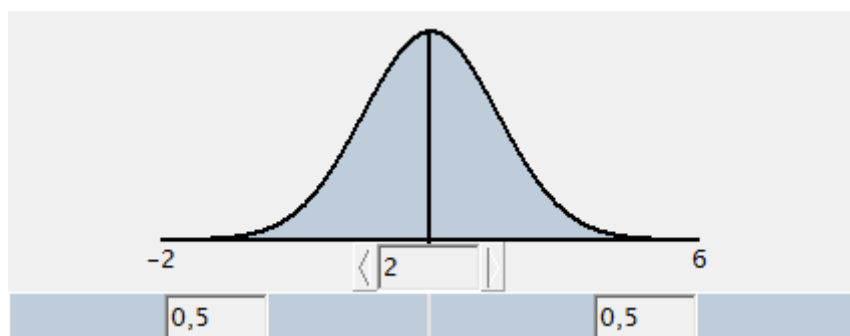
$N(0,1)$



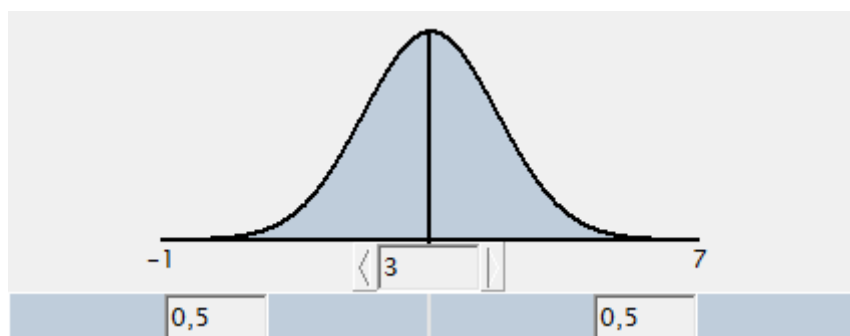
$N(1,1)$



$N(2,1)$



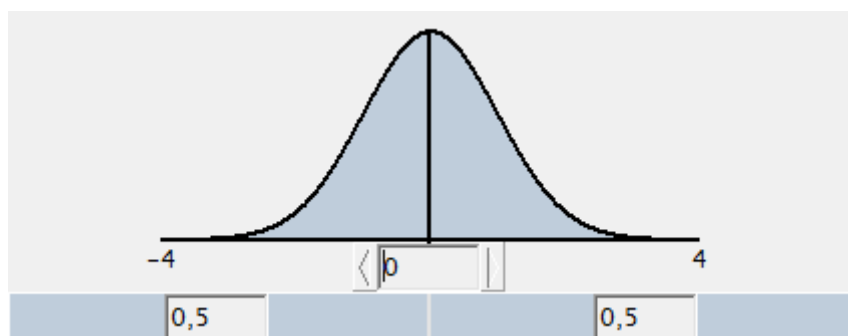
$N(3,1)$



b) $f(x)$ pro $X \sim N(0, \sigma)$

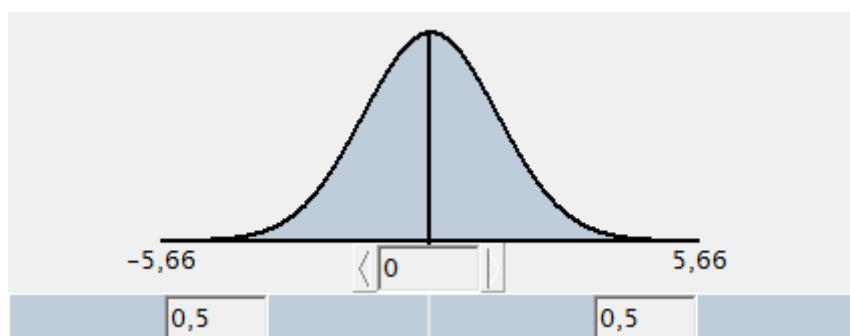
Nyní bude konstantní střední hodnota a proměnlivý rozptyl:

$N(0,1)$; $P(-4 < X < 4) = 0,9999$. $P(X < \mu) = 0,5$.

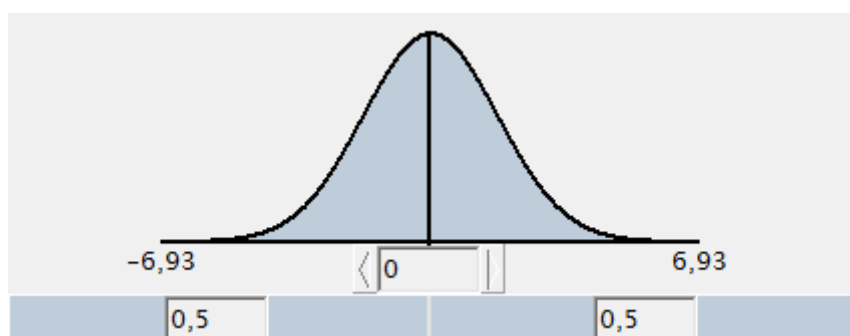


S rostoucím rozptylem se prodlužuje interval, ve kterém se X nachází s p -stí blízkou jedné:

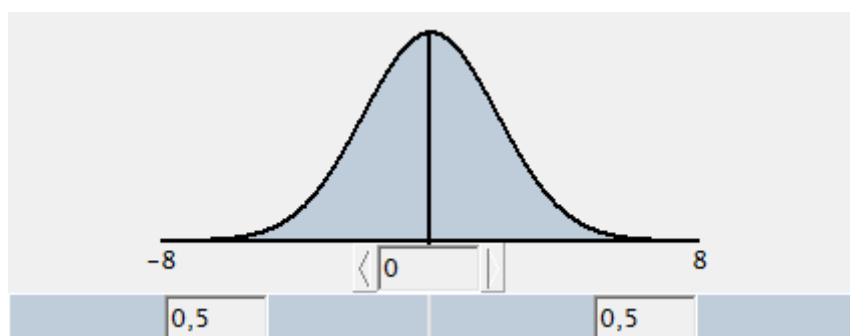
$$N(0,2); P(-5,66 < X < 5,66) = 0,9999.$$



$$N(0,3); P(-6,93 < X < 6,93) = 0,9999.$$



$$N(0,4); P(-8 < X < 8) = 0,9999.$$



2) Rovnoměrné rozdělení $R(a, b)$:

$$X \sim R(a, b) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$x \in (a, b)$,

$f(x) = 0$ pro ostatní x .

Momentová vytvořující funkce

$$y(t) = (e^{b \cdot t} - e^{a \cdot t}) / (b - a)t$$

Věta 5

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuční funkce

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} \\ &= 1 \text{ pro } x \geq b \\ &= 0 \text{ pro } x \leq a \end{aligned}$$

Příklad (ukázka *nevhodného* použití pravidla „3 sigma“)

Vypočítejte $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$, jestliže X má rozdělení $R(a, b)$.

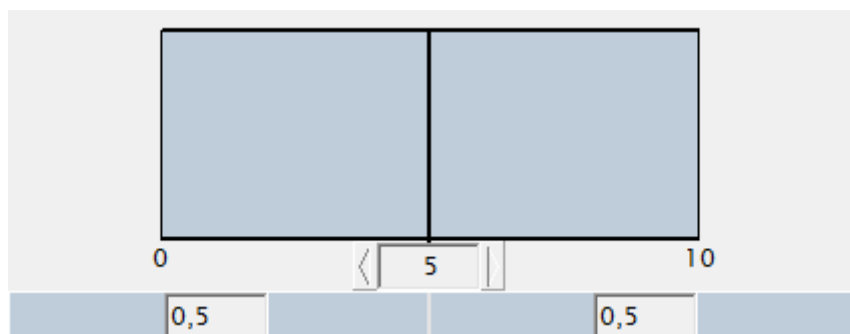
Řešení:

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma) =$$

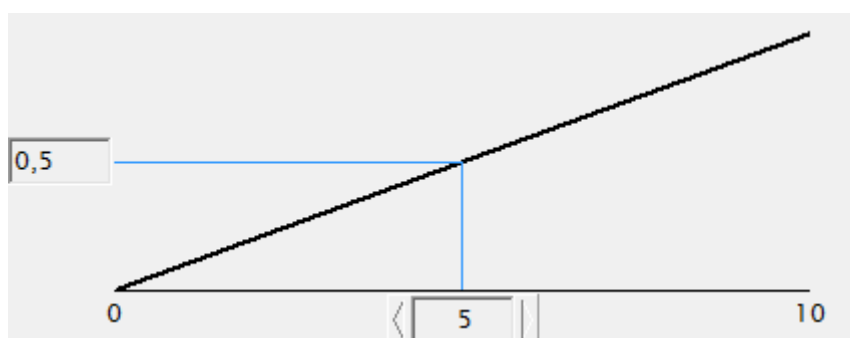
$$= \frac{\mu + 3\sigma - a}{b - a} - \frac{\mu - 3\sigma - a}{b - a} = \frac{6\sigma}{b - a} = \frac{6 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{12}}}{b-a} = \frac{6}{\sqrt{12}} \approx 1,7!$$

Vliv parametrů na $f(x)$

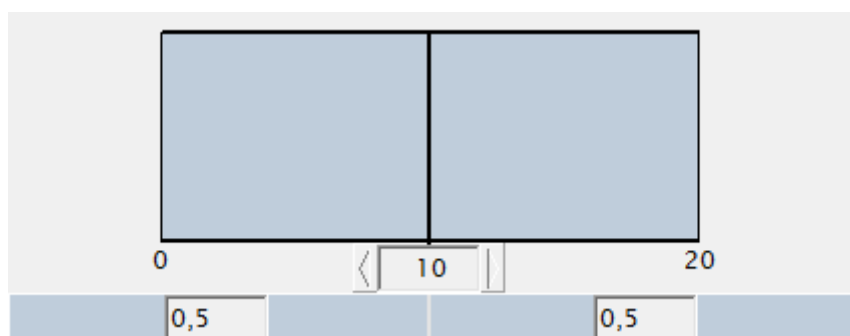
$R(0,10)$; Hustota pravděpodobnosti $f(x)$



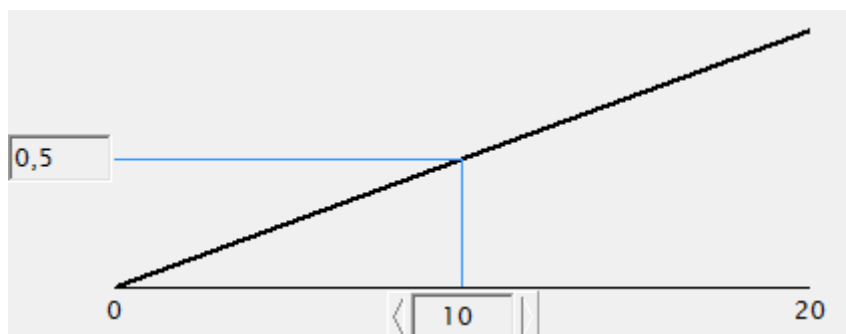
$R(0,10)$; Distribuční funkce $F(x)$



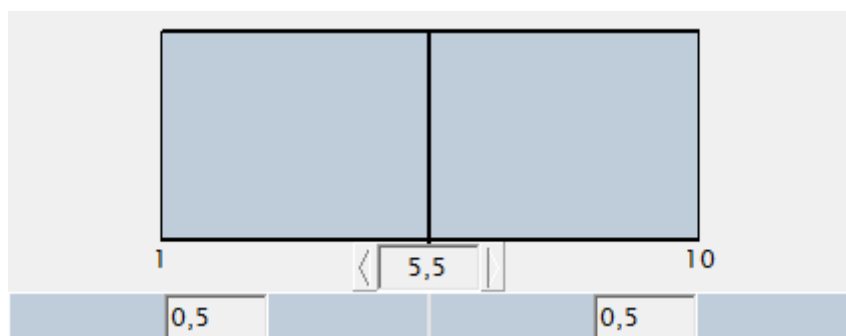
$R(0,20)$; Hustota pravděpodobnosti $f(x)$



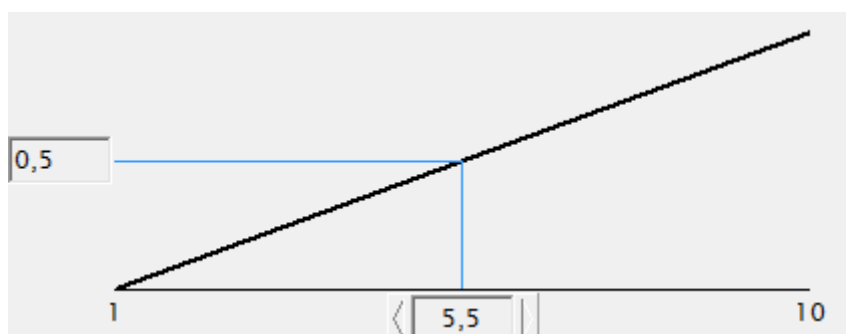
R(0,20) Distribuční funkce F(x)



R(1,10); Hustota pravděpodobnosti f(x)



R(1,10); Distribuční funkce F(x)



3) Exponenciální rozdělení Ex(A, d):

$$X \sim \text{Ex}(A, d) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{d} e^{\frac{-(x-A)}{d}}, \text{ pro } x > 0.$$

$$= 0 \text{ jinak}$$

Exponenciální rozdělení se používá pro $A = 0$ v teorii spolehlivosti, kdy na vodorovné ose je doba, po kterou je zařízení v provozu (= doba do poruchy).

Speciálně, pro častý případ rozdělení $Ex(0,d)$, má hustota pravděpodobnosti jednodušší tvar

$$f(x) = \frac{1}{d} e^{\frac{-x}{d}} = \theta \cdot e^{-\theta \cdot x}, \theta = \frac{1}{d}$$

Potom

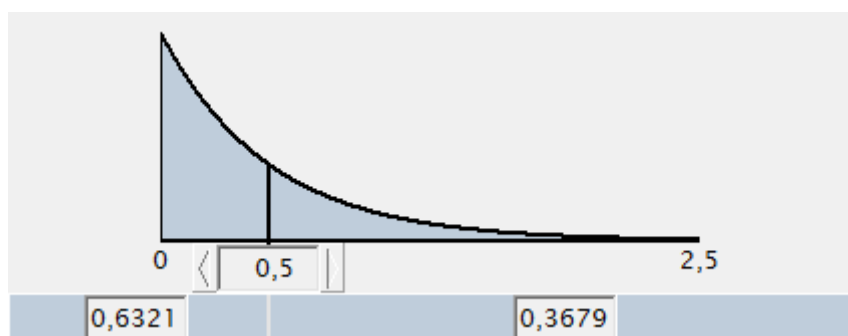
$$EX = 1/\theta$$

$$DX = 1/\theta^2$$

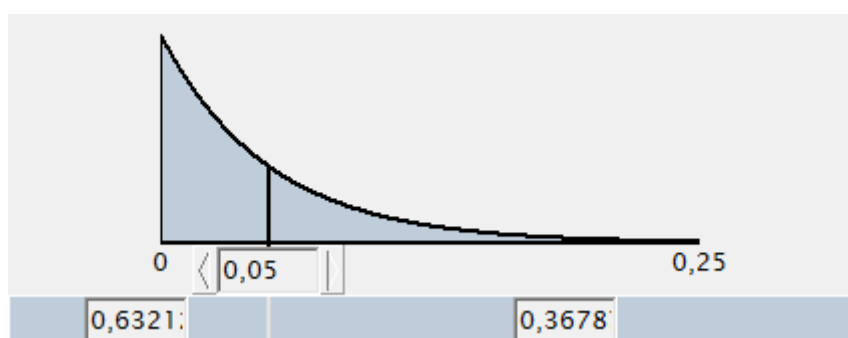
Momentová vytvořující funkce $y(t) = \theta / (\theta - t)$

Vliv parametrů na $f(x)$

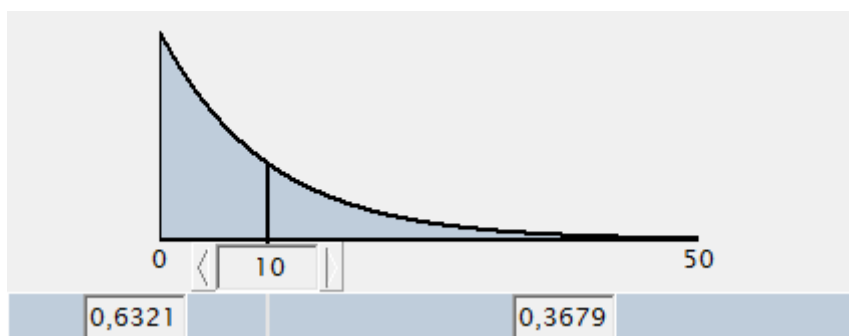
$Ex(0; 2)$



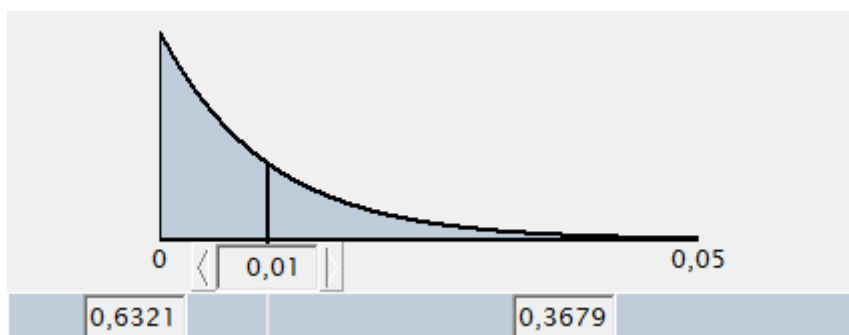
$Ex(0; 20)$



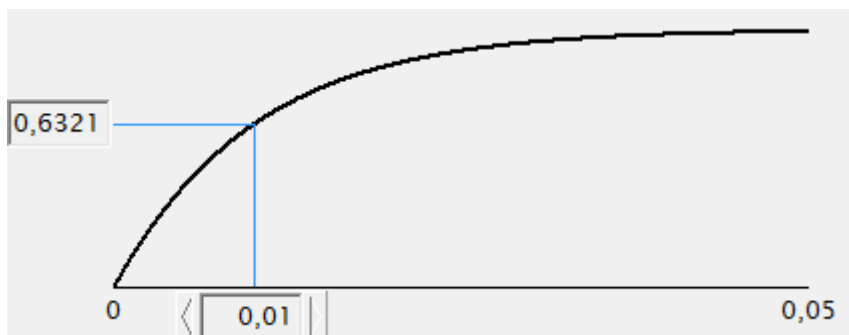
$Ex(0; 0,1)$



$Ex(0,100)$



$F(x)$ pro $Ex(0,100)$



Z grafů je vidět, že změna parametru θ nemá velký vliv na tvar $f(x)$.

4) Weibulovo rozdělení $W(a,b)$:

$$X \sim W(a,b) \Leftrightarrow f(x) = abx^{b-1} \exp[-ax^b];$$

$a > 0, b > 0, x > 0$;

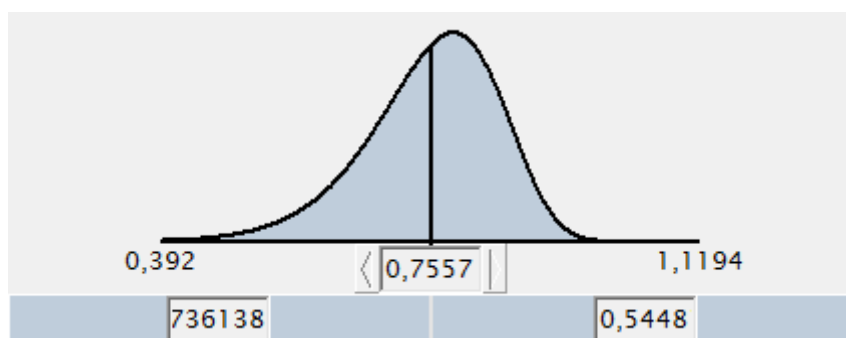
$W(a,b)$ rozdělením se řídí například n.p. představující dobu do poruchy zařízení pro případy, kdy nevyhovuje exponenciální rozdělení.

$$EX = a^{-1/b} \Gamma(1 + b^{-1})$$

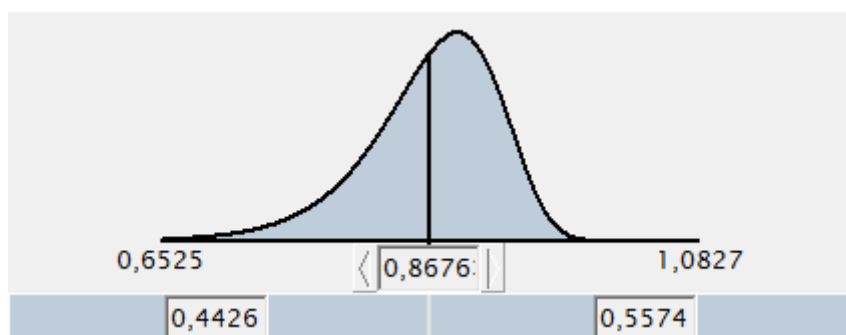
$$DX = a^{-2/b} [\Gamma(1 + 2b^{-1}) - \Gamma^2(1 + b^{-1})]$$

Vliv parametrů na $f(x)$

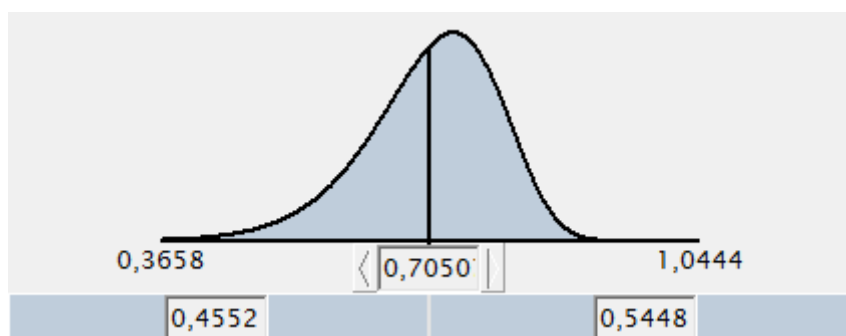
$W(10,10)$



$W(10,20)$

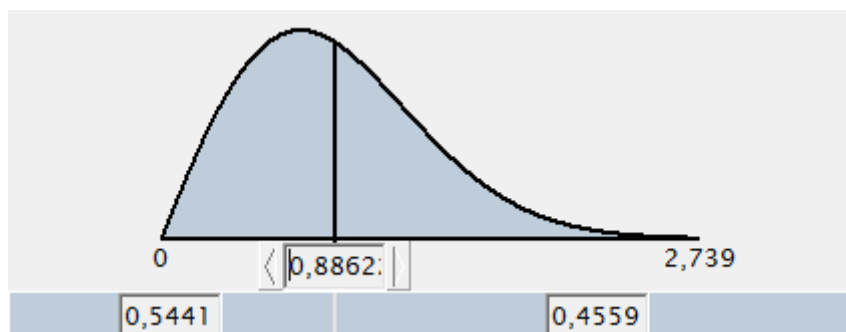


$W(20,10)$

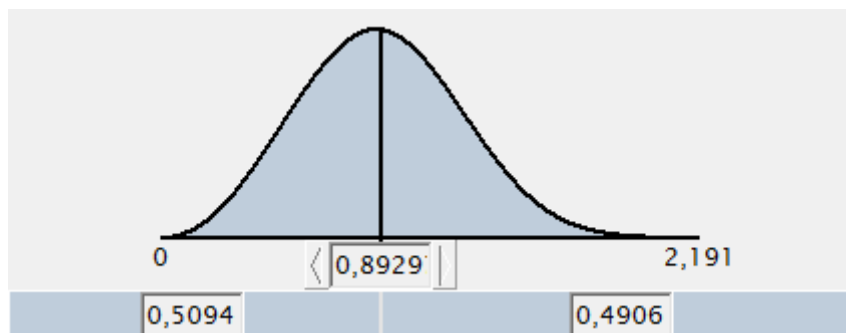


Rozdělení $W(1,b)$

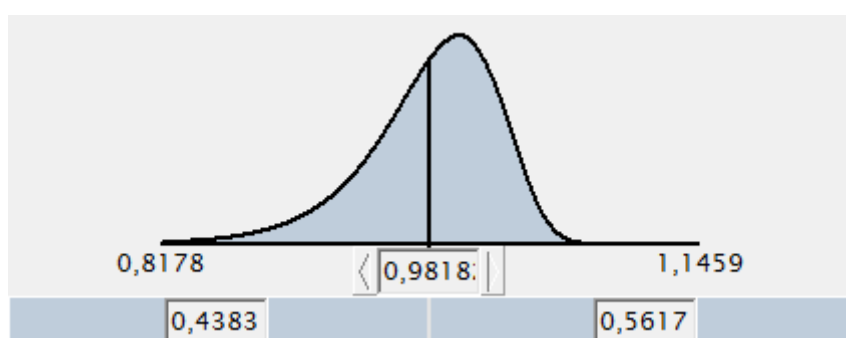
$W(1,2)$



$W(1,3)$

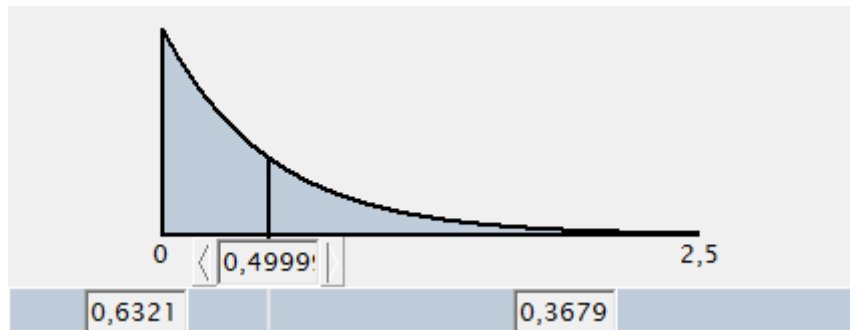


$W(1,30)$

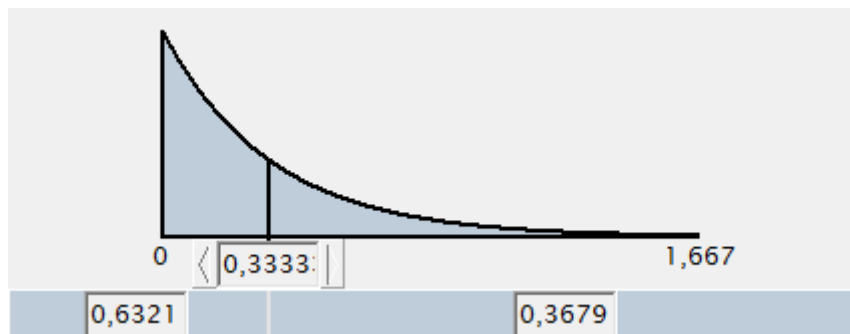


Rozdělení $W(a,1)$

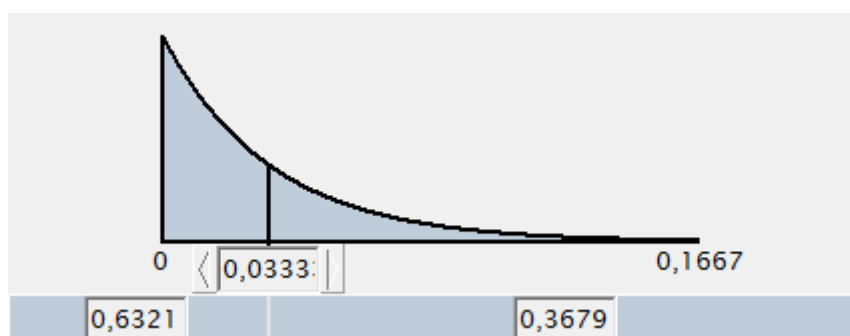
$W(2,1)$



$W(3,1)$



$W(30,1)$



5. Rozdělení beta Beta(a, b)

$$X \sim \text{Beta}(a,b) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

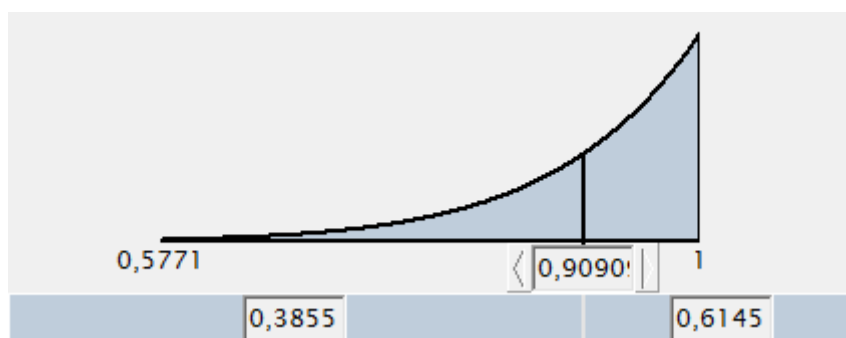
$$0 < x < 1, a > 0, b > 0;$$

$$EX = a/(a + b)$$

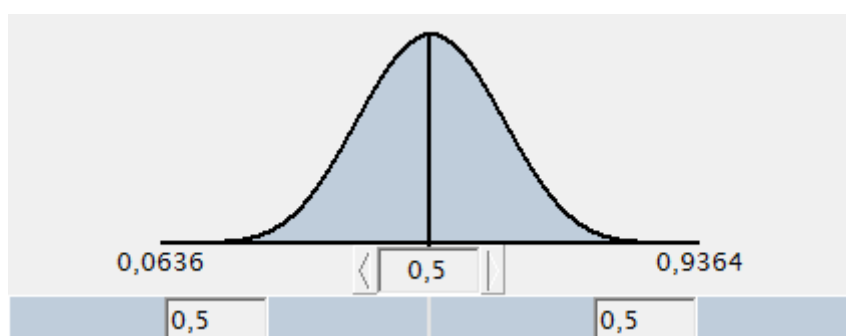
$$DX = ab / [(a + b + 1) (a + b)^2]$$

$f(x)$ u rozdělení beta je velmi proměnlivá v závislosti na volbě parametrů a, b .

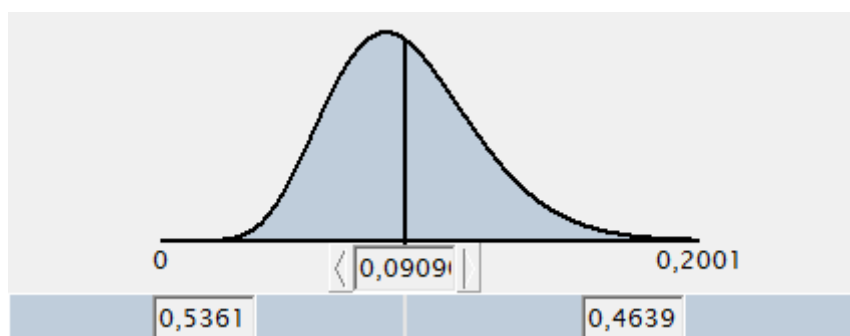
Beta(10,1); $EX = 0,9091$



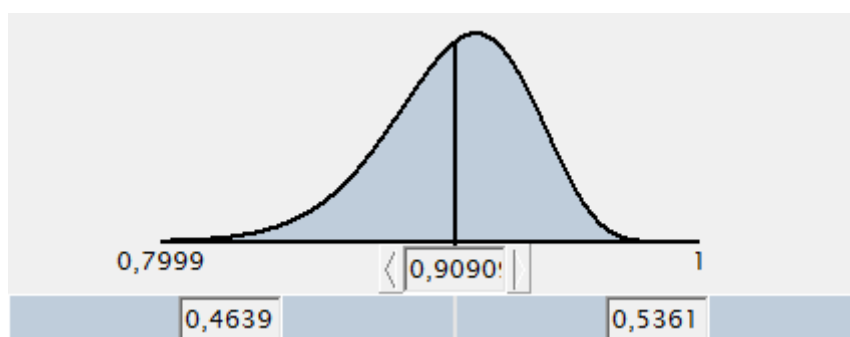
Beta(10,10)



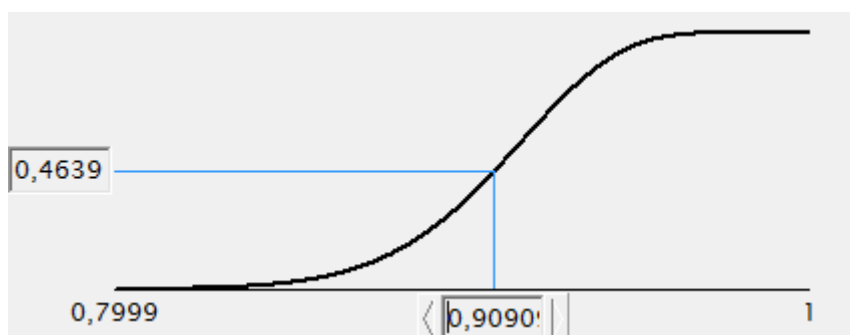
Beta(10,100)



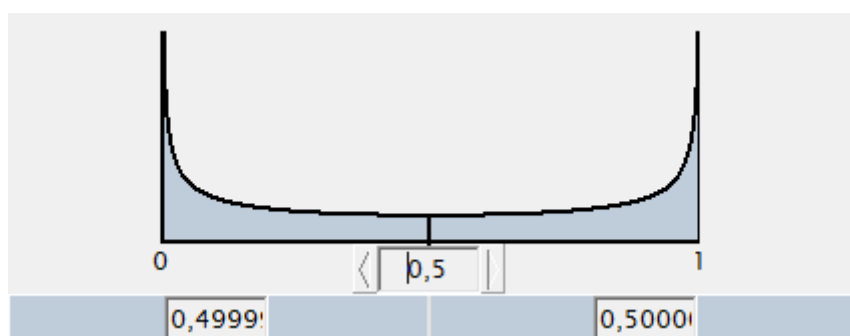
Beta(100,10)



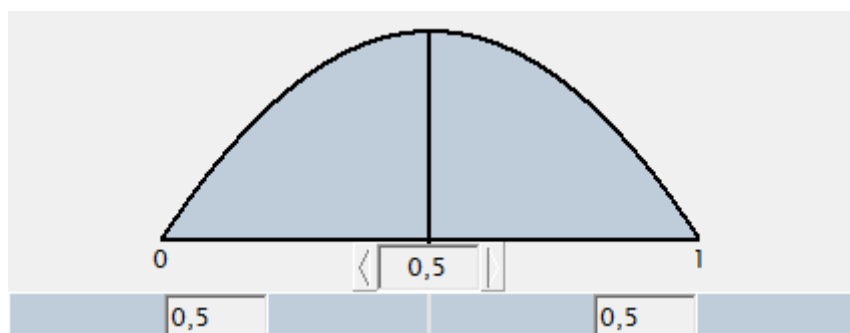
F(x) pro Beta(100,10)



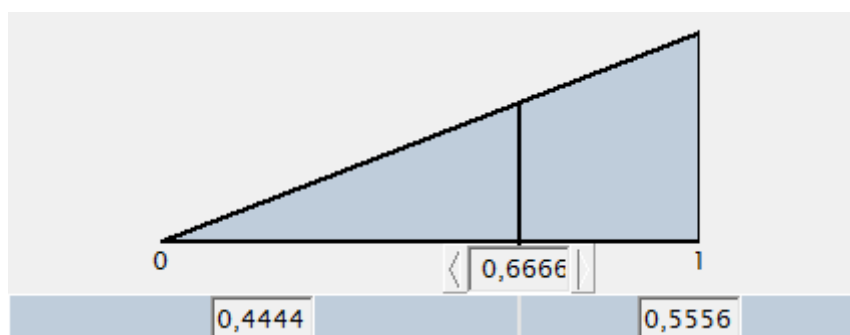
Beta (0,5;0,5)



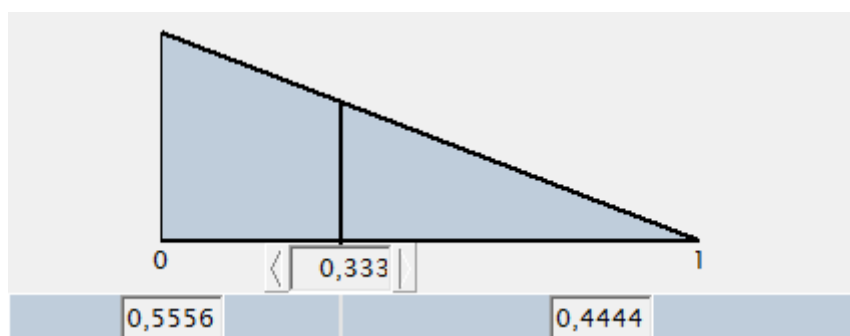
Beta (2,2)



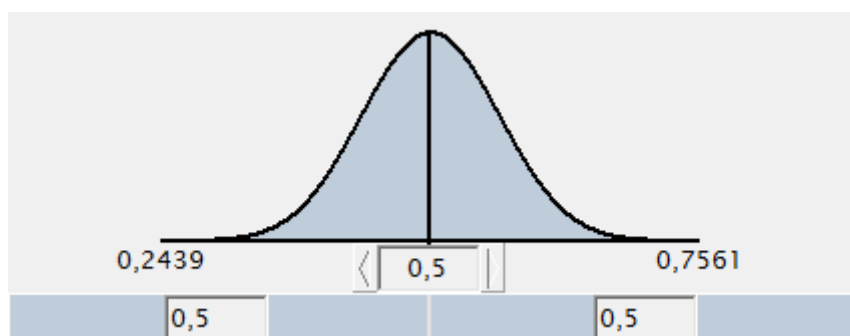
Beta (2,1)



Beta(1,2)



Beta (30,30)



6. Rozdělení gamma $\Gamma(a,b)$

$$X \sim \Gamma(a,b) \Leftrightarrow f(x) = b^a [\Gamma(a)]^{-1} x^{a-1} e^{-b \cdot x}$$

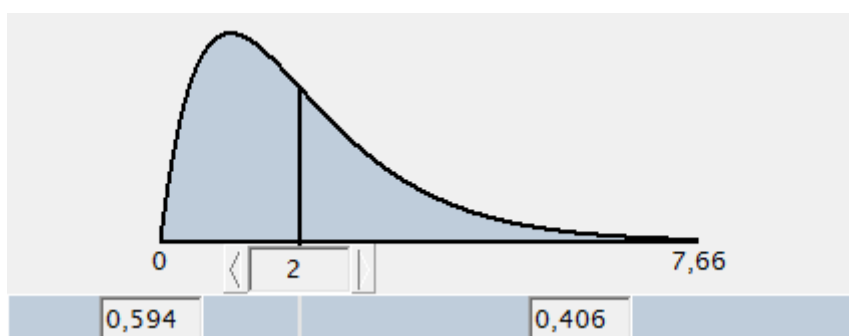
$$x > 0, a > 0, b > 0;$$

$$EX = a / b$$

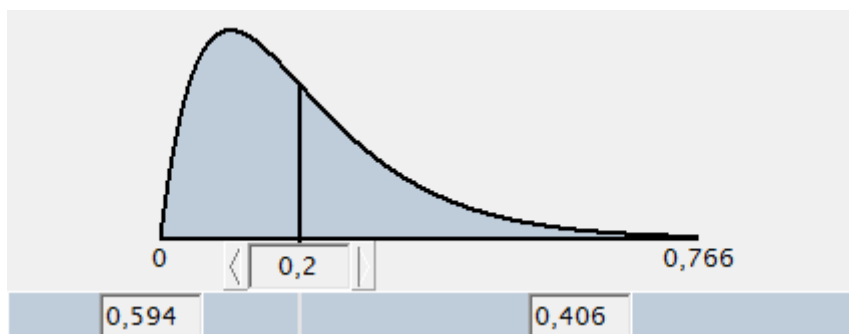
$$DX = a / b^2$$

$$\text{Momentová vytvořující funkce } y(t) = [b / (b - t)]^a, t < b$$

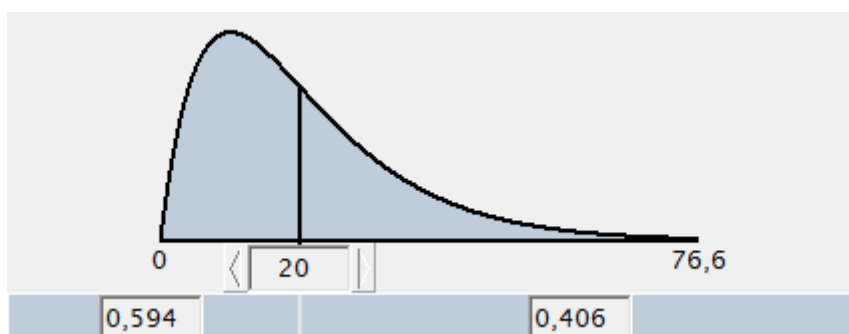
$\Gamma(2,1)$



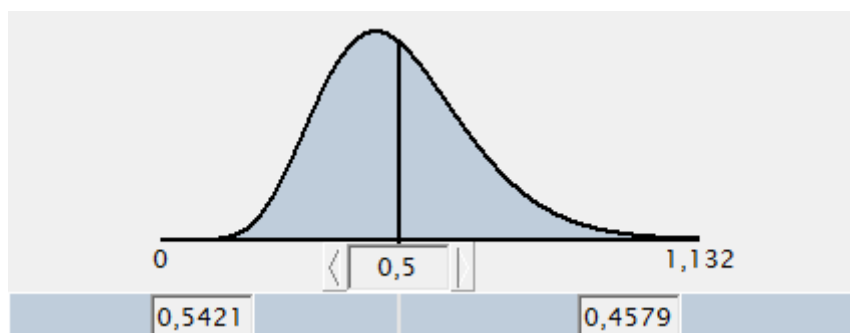
$\Gamma(2,10)$



$\Gamma(2; 0,1)$

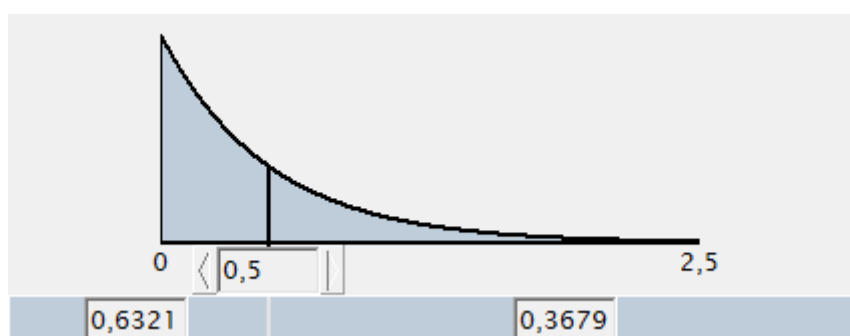


$\Gamma(10,20)$

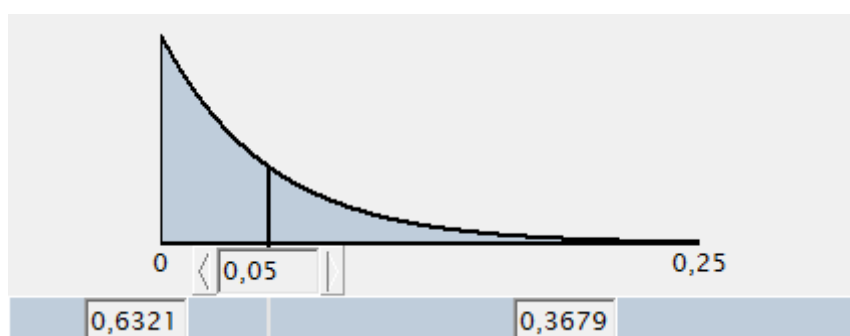


Rozdělení $\Gamma(1,b)$ je exponenciálním rozdělením:

$\Gamma(1,2)$



$\Gamma(1,20)$



9.3 Třída exponenciálních rozdělení (EXP)

Definice

Mějme náhodnou veličinu Y , jejíž frekvenční funkce $f(y, \theta)$ závisí na jednom parametru θ .

$f(y, \theta)$ patří do EXP, jestliže $f(y, \theta)$ lze zapsat ve tvaru :

$$f(y, \theta) = s(y) \cdot t(\theta) \cdot e^{a(y)b(\theta)} \quad (1)$$

kde a, b, s, t jsou známé funkce.

Protože

$$f(y) = e^{\ln f(y)} \quad (2)$$

lze rovnici (1) lze zapsat také ve tvaru

$$\begin{aligned} f(y, \theta) &= \exp[\ln s(y) + \ln t(\theta) + a(y) \cdot b(\theta)] \\ &= \exp[a(y) \cdot b(\theta) + c(\theta) + d(y)] \end{aligned} \quad (3)$$

kde

$$c(\theta) = \ln t(\theta), d(y) = \ln s(y) \quad (4)$$

Je-li $a(y) = y$, jedná se o tzv. *kanonický tvar*

Věta 1

Do EXP patří z výše uvedených rozdělení např. rozdělení N, Bi, Po, Exp a W.

Funkce a, b, c, d mají u jednotlivých rozdělení tento tvar

a) $Y \sim (\mu, \sigma^2)$, σ^2 považujeme za známý parametr.

$$f(y, \mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right]$$

$$f(y, \mu) = \exp \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)^2 \right]$$

$$f(y, \mu) = \exp \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu \cdot y}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right]$$

Odtud:

$a = y$ (kanonický tvar),

$$b = \frac{\mu}{\sigma^2},$$

$$c = \frac{-\mu^2}{2\sigma^2} - \ln(2 \cdot \pi \cdot \sigma^2),$$

$$d = \frac{-y^2}{2\sigma^2};$$

parametr $\theta = \mu$

b) $Bi(n, \pi)$, n je známo

$$\begin{aligned} f(y, \pi) &= \binom{n}{y} \pi^y \cdot (1 - \pi)^{n-y} \\ &= \exp \left[\ln \binom{n}{y} + y \ln \pi + (n - y) \ln(1 - \pi) \right] \\ &= \exp \left[\ln \binom{n}{y} + y \cdot \ln \frac{\pi}{1 - \pi} + n \ln(1 - \pi) \right] \end{aligned}$$

Odtud:

$$a = y \quad (\text{kanonický tvar}), \quad b = \ln \frac{\pi}{1 - \pi}$$

$$c = n \cdot \ln(1 - \pi), \quad d = \ln \binom{n}{y}$$

c) $\text{Po}(\theta)$

$$f(y, \theta) = \frac{\theta^y}{y!} \cdot e^{-\theta} \quad \text{tj}$$

$$f(y, \theta) = \exp(y \ln \theta - \theta - \ln y!)$$

Odtud

$a = y$ (kanonický tvar)

$b = \ln \theta$

$c = -\theta$

$d = -\ln y!$

d) Exponenciální rozdělení $\text{Ex}(\theta)$

$$f(y, \theta) = \theta \cdot e^{-y\theta} = \exp[\ln \theta - y \cdot \theta] \Rightarrow$$

Odtud:

$$a = y, \quad b = -\theta, \quad c = \ln(\theta), \quad d = 0, \quad b' = -1, \quad c' = \frac{1}{\theta}$$

Věta 2 (Vlastnosti EXP)

Platí:

$$E[a(Y)] = \frac{-c'(\theta)}{b'(\theta)}$$

$$\text{var}[a(Y)] = \frac{b''(\theta) \cdot c'(\theta) - c''(\theta) \cdot b'(\theta)}{[b'(\theta)]^3}$$

Význam věty 2

- 1) První vztah umožňuje u kanonického tvaru ihned zjistit střední hodnotu a disperzi náhodné veličiny Y .
- 2) Pomocí těchto vztahů lze snadno dokázat např.
 - a) $Y \sim \text{Po}(\theta) \Rightarrow E(Y) = D(Y) = \theta$
 - b) $Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(Y) = \mu, D(Y) = \sigma^2$
 - c) $Y \sim \text{Bi}(n, p) \Rightarrow E(Y) = n \cdot p, D(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Useknuté rozdělení

Definice

Má-li X distribuční funkci $F(x)$ a $F(x)$ je některé ze známých rozdělení, ale s omezeným oborem hodnot, např. pro $x \in \langle a, b \rangle$, provedeme tzv. useknutí rozdělení $F(x)$: nová distribuční funkce $F_1(x)$ je definována pomocí funkce $F(x)$ rovnicí

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, \quad x \in \langle a, b \rangle$$



Shrnutí pojmů kapitoly 9

V této kapitole byl proveden přehled nejvýznamnějších typů rozdělení pro diskrétní a spojitě náhodné proměnné. U každého rozdělení je potřeba znát jeho definici, vlastnosti a graf, případně změny grafu v závislosti na změnách parametrů.



Otázky ke kapitole 9

1. Které typy důležitých rozdělení diskrétních náhodných veličin znáte
2. Které typy důležitých rozdělení spojitých náhodných veličin znáte
3. Jak se počítá EX pro rozdělení $Bi(n, p)$
4. Jaký je vztah EX a DX u rozdělení $Po(a)$
5. Vyjádřete $p(x)$ dvěma způsoby pro X diskrétní
6. Se kterým rozdělením souvisí opakované nezávislé pokusy
7. Se kterým rozdělením souvisí opakované závislé pokusy
8. Jak ovlivňují parametry N rozdělení graf $f(x)$
9. Napište pravidlo 3 sigma. Pro která rozdělení platí
10. Jaký je vztah funkcí $F(x)$ a $\phi(x)$ u N rozdělení
11. Jak značíme kvantily u N rozdělení
12. Napište vztah kvantilu x_p a u_p
13. Nakreslete $f(x)$ pro rozdělení $F_{m,n}$; t_n ; χ_n ; Ex
14. Kdy patří náhodná proměnná Y do třídy exponenciálních rozdělení (EXP)
15. Která rozdělení patří do EXP znáte
16. Co je useknuté rozdělení



Úlohy ke kapitole 9

1. Vypočítejte $P(-1 \leq X \leq 2)$ pro veličinu $X \sim N(1; 4)$.
2. Nakreslete graf $f(x)$ pro $X \sim N(1; 4)$.
3. Nakreslete graf $f(x)$ a $F(x)$ pro náhodnou veličinu $X \sim N(1; 4)$
a v grafu vyznačte $P(-1 \leq X \leq 2)$
4. $X \sim N(0,1)$. Vypočítejte pravděpodobnost $P(-1 < X < 3)$ a znázorněte ji v grafu distribuční funkce.
5. Nakreslete graf $f(x)$ pro rozdělení $N(1,1)$.
6. Proved'te odvození pravidla 2 sigma.



KLÍČ K ŘEŠENÍ KAP.9

Řešení(1):

$$P(-1 \leq X \leq 2) = \Phi\left(\frac{2-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right) = 0,69146 - (1 - 0,84134) = 0,85012$$

Řešení(6):

Má se vypočítat pravděpodobnost $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= F(\mu + 2\sigma) - F(\mu - 2\sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) - 1 = 0,9545 \end{aligned}$$

10. FUNKCE NÁHODNÉ PROMĚNNÉ



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíle

- a) vysvětlit pojem funkce náhodné proměnné
- b) ukázat způsob popisu funkce náhodné proměnné
- c) uvést další důležité typy rozdělení v návaznosti na kapitolu 9

Velmi často jsou náhodné proměnné závislé na jiných náhodných proměnných. Jestliže se například strana čtverce X náhodně mění, pak také jeho obsah P je náhodně proměnlivý. Jelikož P závisí na X , je P funkcí X , tedy $P = f(X)$. P jakožto náhodná proměnná má všechny náležitosti, tj. obor hodnot, zákon rozdělení a číselné charakteristiky. V této kapitole se budeme zabývat problematikou nalezení zákona rozdělení P , obecně Y , je-li znám zákon rozdělení X .



Výklad

10.1 Zákon rozdělení funkce náhodné proměnné

Věta 1

Nechť náhodná veličina Y je funkcí náhodné veličiny X : $Y = t(X)$ a $X \sim f(x)$. Označme $g(y)$ hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y a $G(y)$ její distribuční funkci. $X = \tau(Y)$ je inverzní funkce k $Y = t(X)$.

Potom hustota $g(y)$ se nalezne

a) pro t rostoucí

$$g(y) = f[\tau(y)]\tau'(y) \quad (1)$$

b) pro t klesající je

$$g(y) = f[\tau(y)] | -\tau'(y) | \quad (2)$$

Vzorec použitelný pro oba případy je

$$g(y) = f[\tau(y)]|\tau'(y)| \quad (3)$$

Jestliže inverzní funkce $X = \tau(Y)$ není jednoznačná, tzn. jedné hodnotě y odpovídá několik hodnot x , např. $x_1 = \tau_1(y), \dots, x_k = \tau_k(y)$, pak

$$g(y) = \sum_{j=1}^k f[\tau_j(y)]|\tau'_j(y)| \quad (4)$$

Příklad 1

$Y = a + bX$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Nalezněte $g(y)$.

Řešení:

Mezi Y a X je lineární závislost vyjádřená (reálnou) funkcí $y = a + bx$.

Inverzní funkce je tedy $x = \frac{y-a}{b} = \tau(y)$ a její derivace $\tau'(y) = \frac{1}{b}$.

Protože $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, je $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$g(y)$ získáme dosazením do (1):

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\frac{y-a}{b}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[y-(a+\mu)]^2}{2b^2\sigma^2}}$$

Je tedy vidět, že také Y má normální rozdělení $N(a + \mu, b^2\sigma^2)$.

10.2 Číselné charakteristiky funkce náhodné proměnné

Věta 2

Jestliže $Y = t(X)$, $X \sim f(x)$, $Y \sim g(y)$, potom střední hodnota Y je

a) pro spojitou náhodnou veličinu Y

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx \quad (5)$$

b) pro diskrétní náhodnou veličinu Y

$$EY = \sum_x t(x)p(x) \quad (6)$$

Věta 3

Jestliže $Y = t(X)$, $X \sim f(x)$, $Y \sim g(y)$, potom k -té momenty pro spojitou náhodnou veličinu se určí

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [t(x)]^k f(x) dx \quad (7)$$

$$\nu_k = \int [t(x) - \mu_1]^k f(x) dx \quad (8)$$

10.3 Momentová vytvořující funkce

Definice 1

Má-li funkce náhodné veličiny tvar

$$Y = e^{Xt}, \quad (9)$$

pak střední hodnota této funkce EY je funkce reálné proměnné t , značí se $y(t)$ a nazývá se *momentové vytvořující funkce*.

Nalezne se pomocí věty 2 takto:

a) pro spojitou veličinu

$$y(t) = EY = Ee^{Xt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

b) pro diskrétní veličinu

$$y(t) = \sum_x e^{xt} p(x)$$

Příklad 2

a) Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom

$$y(t) = e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

b) Jestliže $X \sim Bi(n, p)$, potom

$$y(t) = (q + p \cdot e^t)^n$$

kde $q = 1 - p$

Momentová vytvořující funkce má řadu zajímavých vlastností.

Věta 4 (vlastnosti momentové vytvořující funkce)

1) $y^{(k)}(0) = \mu_k$, tzn. k-tá derivace v bodě nula představuje k-tý obecný moment.

2) Momentová vytvořující funkce *součtu* náhodných veličin je rovna *součinu* momentových vytvořujících funkcí:

Jestliže $X_i \sim y_i(t)$, potom

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \prod_{i=1}^n y_i(t)$$

(10)

10.4 Důležitá rozdělení funkce náhodné proměnné

1) Logaritmicko normální rozdělení $LN(\mu, \sigma)$:

$$Y \sim LN(\mu, \sigma) \Leftrightarrow f(y) = \frac{1}{y \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, y > 0.$$

(11)

Charakteristiky:

$$EX = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad DX = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

Věta 5

Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $Y = e^X$,

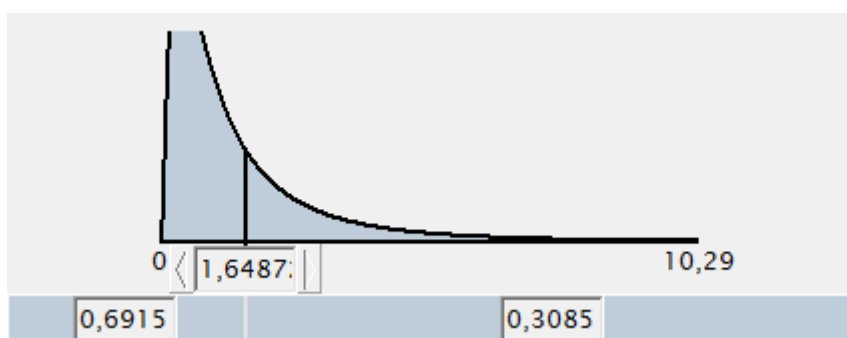
pak náhodná proměnná Y má rozdělení $LN(\mu, \sigma)$.

Poznámka

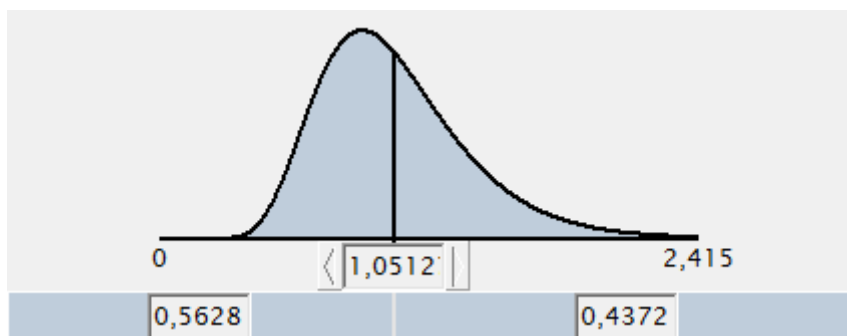
Rovnici $f(x)$ pro $LN(\mu, \sigma)$ nalezneme pomocí vzorce (1) stejně, jako v uvedeném příkladě.

Vliv parametrů na $f(x)$

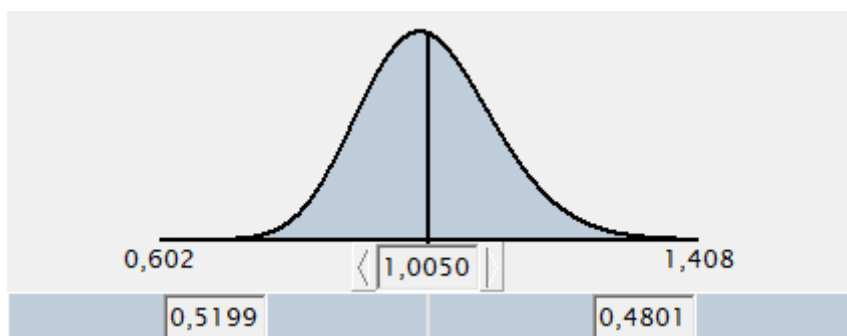
$LN(0;1)$



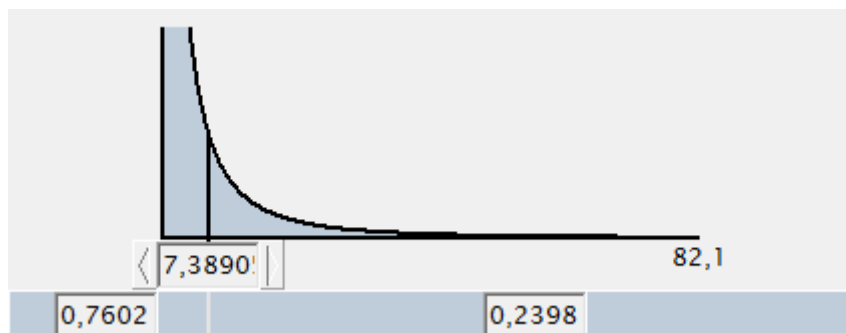
$LN(0; 0,1)$



$LN(0;0,01)$



LN(1;2)

2) Pearsonovo rozdělení χ_n^2 (chí kvadrát):

$$X \sim \chi_n^2 \Leftrightarrow f(x) = 2^{-n/2} [\Gamma(n/2)]^{-1} x^{(n-2)/2} e^{-x/2}, \quad x > 0;$$

$$EX = n, \quad DX = 2n$$

$$\text{Momentová vytvořující funkce } y(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$$

Věta 6

Mají-li náhodné proměnné X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ rozdělení $N(0,1)$ a jsou-li nezávislé, pak náhodná proměnná

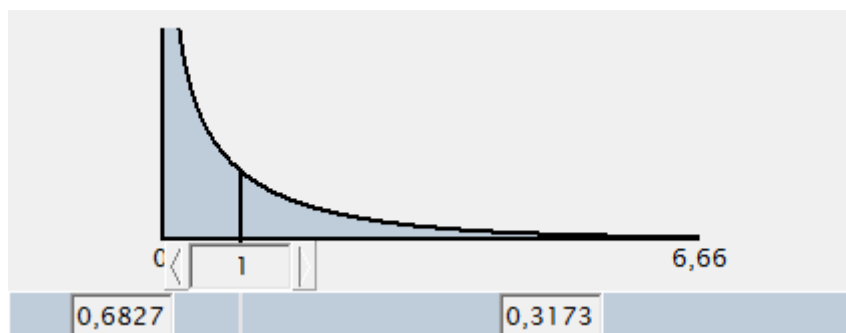
$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \tag{12}$$

má rozdělení χ_n^2 s n stupni volnosti.

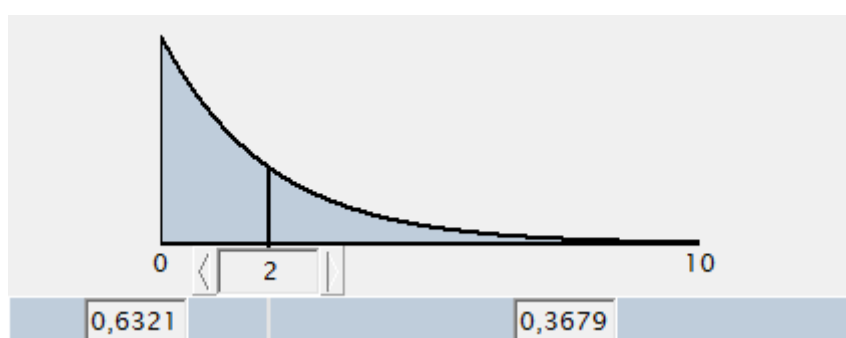
Pokud mají náhodné proměnné X_i rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$, pak Y má tzv. *necentrál-ní rozdělení chí-kvadrát*, které se označuje $\chi_{n,\lambda}^2$, λ je koeficient necentrality.

Vliv parametru n na $f(x)$

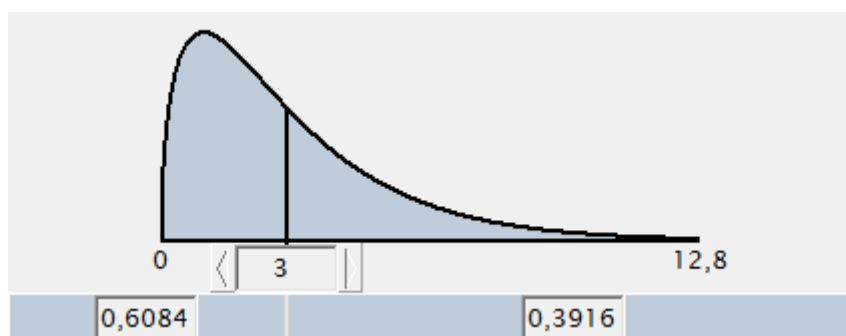
χ^2_1



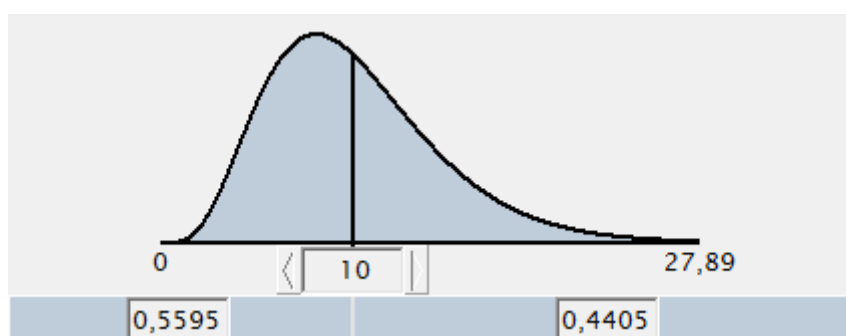
χ^2_2

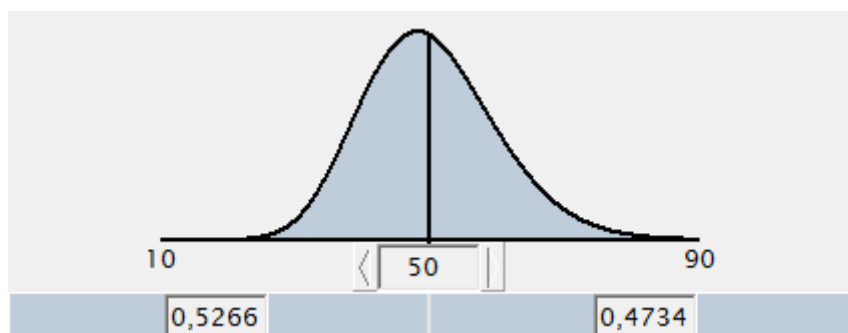


χ^2_3



χ^2_{10}



χ^2_{50} 3) Studentovo rozdělení t_n :

$$X \sim t_n \Leftrightarrow f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{[\Gamma(n/2)]^1 (n\pi)^{1/2}} (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$$

$$EX = 0$$

$$DX = n(n-2)^{-1}$$

Vztah t_n s $F_{m,n}$ rozdělením:

$$t_n^2 = F_{1,n}$$

Věta 7

Má-li náhodná proměnná X_1 rozdělení $N(0,1)$ a náhodná proměnná X_2 rozdělení χ_n^2 a jsou-li X_1 a X_2 nezávislé, pak náhodná proměnná

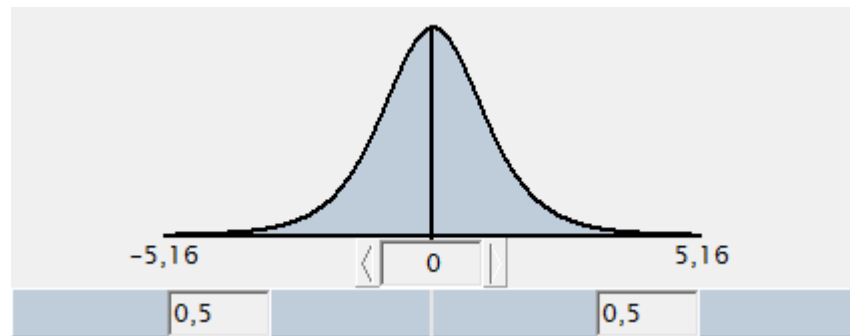
$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{n}}} \quad (13)$$

má Studentovo rozdělení t_n s n stupni volnosti.

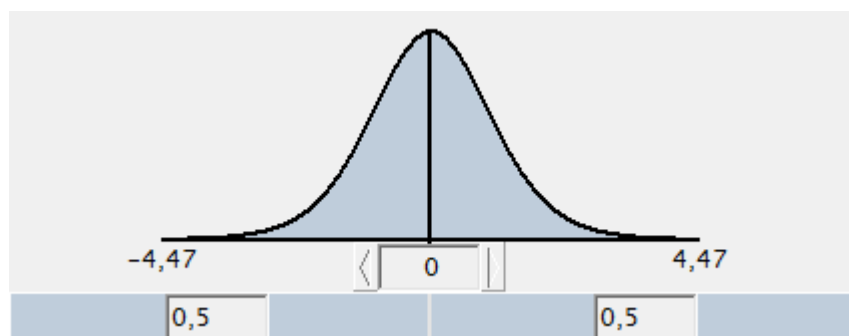
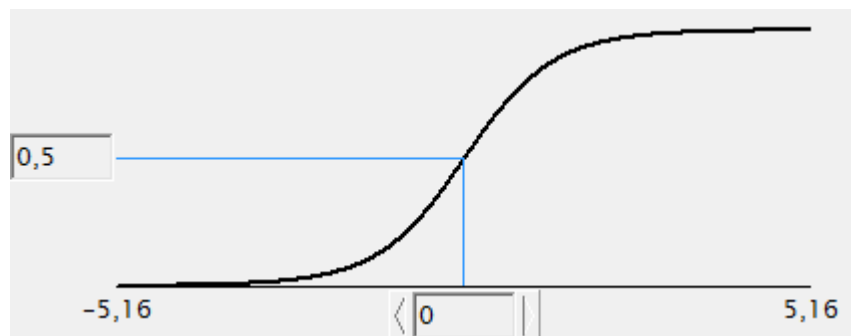
Pokud má náhodná proměnná X_1 obecné normální rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$ a X_2 rozdělení χ_n^2 , pak Y má tzv. *necentrální Studentovo rozdělení* $t_{n,\lambda}$.

Vliv parametrů na $f(x)$

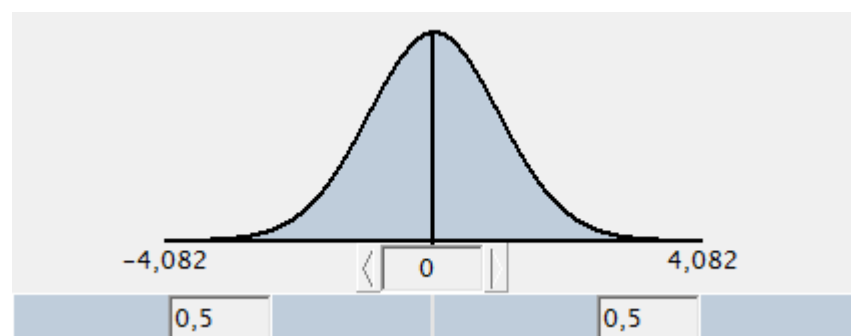
t_5



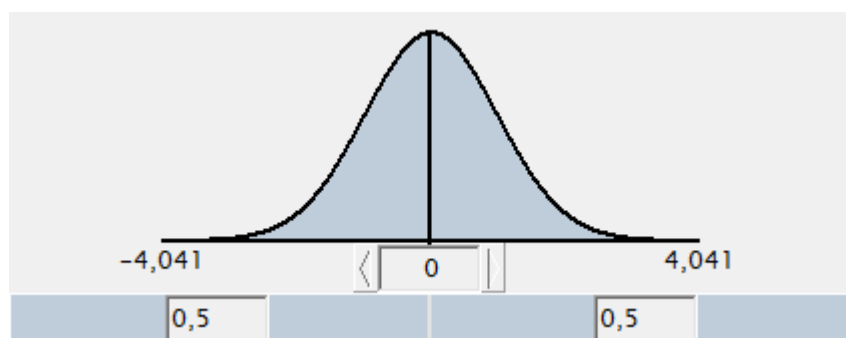
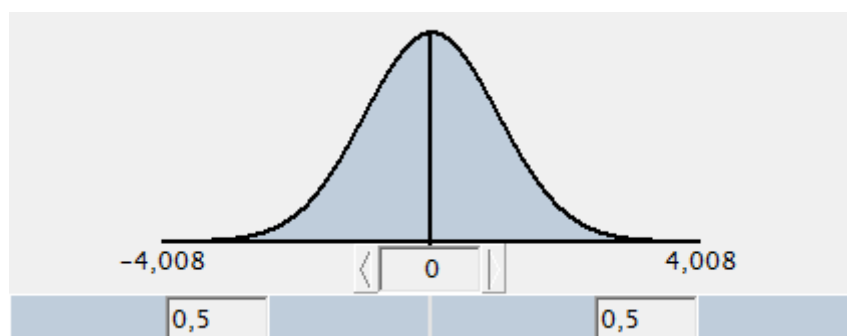
Distribuční funkce pro t_5



t_{10}



t_{50}

t_{100}  t_{500} 

4) Fischerovo - Snedecorovo rozdělení $F_{m,n}$

$$X \sim F_{m,n} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2) \Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{(m-2)/2} [1+mx/n]^{-(m+n)/2}$$

$$x > 0, m, n = 1, 2, \dots;$$

$$EX = n/(n-2)$$

$$DX = 2n^2(m+n-2) / [m(n-2)^2(n-4)]$$

Věta 8

Má-li náhodná proměnná X_1 rozdělení χ_m^2 a X_2 rozdělení χ_n^2 a jsou-li X_1 a X_2 nezávislé, pak náhodná proměnná

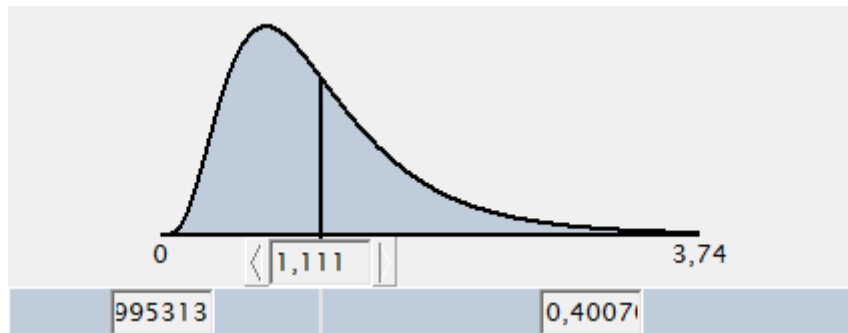
$$Y = \frac{\frac{X_1}{m}}{\frac{X_2}{n}}$$

(14)

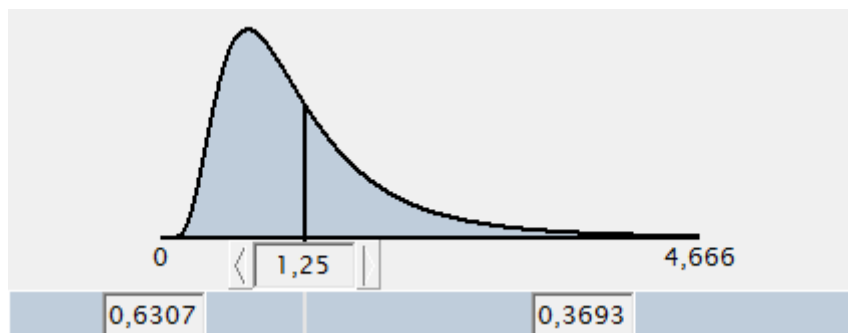
má Fischerovo - Snedecorovo rozdělení $F_{m,n}$ (stupně volnosti m,n). Pokud má náhodná proměnná X_1 necentrální rozdělení $\chi_{m,\lambda}^2$ a X_2 rozdělení χ_n^2 , pak Y má tzv. *necentrální Fischerovo rozdělení* $F_{m,n,\lambda}$.

Vliv parametrů na $f(x)$

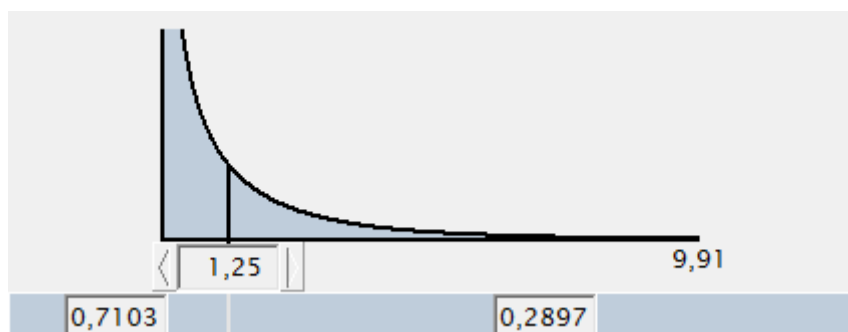
$F_{10,20}$



$F_{20,10}$



$F_{1,10}$



Aproximace rozdělení chí-kvadrát

Věta 9 (vztah rozdělení $P_o(\lambda)$ a $(\chi^2_{2(c+1)})$)

Je-li F distribuční funkce rozdělení chí-kvadrát s $2(c+1)$ stupni volnosti $(\chi^2_{2(c+1)})$, pak platí

$$\sum_{i=0}^c \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = 1 - F(2\lambda)$$

Tato věta má uplatnění např. ve statistické přejímce.



Shrnutí pojmů kapitoly 10

V této kapitole byl podán obecný návod k nalezení zákona rozdělení pravděpodobnosti funkce jedné náhodné proměnné a byly také uvedeny nejvýznamnější typy funkcí náhodných proměnných. Jsou uvedeny v kapitole 10.4 a jejich znalost je pro potřeby matematické statistiky zásadní.



Otázky ke kapitole 10

1. Které informace jsou potřebné k nalezení zákona rozdělení Y, je-li $Y = t(X)$
2. Napište vzorec pro nalezení hustoty $g(y)$ funkce $Y = t(X)$
3. Nalezněte $g(y)$, jestliže $Y = a + bX$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
4. Jak se vypočítá EY , jestliže $Y = t(X)$, $X \sim f(x)$, $Y \sim g(y)$
5. Napište definici momentové vytvořující funkce
6. Uveďte vlastnosti momentové vytvořující funkce
7. Napište momentovou vytvořující funkci X, jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
8. Napište momentovou vytvořující funkci X, jestliže $X \sim Bi(n, p)$
9. Jak lze vytvořit LN rozdělení
10. Nakreslete graf LN rozdělení
11. Jak lze vytvořit t_n rozdělení
12. Nakreslete graf t_n rozdělení
13. Jak lze vytvořit $F_{m,n}$ rozdělení
14. Nakreslete graf $F_{m,n}$ rozdělení
15. Jak lze vytvořit χ_n^2 rozdělení
16. Nakreslete graf χ_n^2 rozdělení



Úlohy ke kapitole 10

1. $Y = 5X + 2$, X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Určete rozdělení a charakteristiky veličiny Y .

2. $Y = X^2$, X má rozdělení $N(0,1)$. Určit $g(y)$.

3. Dokažte: Jestliže $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ a X_i mají rozdělení $N(\mu_i, \sigma_i^2)$,

potom

$$Y \sim N\left(\sum_i a_i \mu_i, \sum_i a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

4. Napište momentovou vytvořující funkci pro rozdělení

a) $N(\mu, \sigma^2)$ b) $N(2,9)$

6. Dokažte, že momentová vytvořující funkce (MVF) součtu NV se rovná součinu MVF těchto NV.

7. Využijte známé vlastnosti $y(t)$ k nalezení momentové vytvořující funkce veličiny $Y = X_1 + X_2$, jestliže $X_1 \sim N(1; 4)$ a $X_2 \sim N(2; 9)$.

8. Mějme náhodné veličiny $Z_1 \sim N(0,1)$, $Z_2 \sim \chi_5^2$. S použitím těchto náhodných veličin vytvořte náhodnou veličinu $X \sim \chi_1^2$ a $Y \sim t_5$.

9. Nakreslete přibližný tvar hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ pro a) χ_1^2 , b) χ_5^2 , c) t_4

10. Nakreslete hustotu pravděpodobnosti rozdělení $F_{2,3}$, t_3 a χ_3^2

11. NÁHODNÝ VEKTOR



Čas ke studiu: 4 hodiny



Cíl

- ukázat způsoby popisu náhodného vektoru, zejména pomocí číselných charakteristik
- objasnit dvě nejvýznamnější rozdělení náhodného vektoru: vícerozměrné normální rozdělení a multinomické rozdělení

V matematické statistice je náhodný výběr modelován pomocí náhodného vektoru. Kapitola o náhodných vektorech je proto teoretickým základem pro zpracování výběrových souborů.

Poznatky o náhodných vektorech jsou zobecněním poznatků o náhodných proměnných. Řada pojmů je velmi podobných. Je proto velmi vhodné, zopakovat si před studiem této kapitoly, kapitolu 7.



Výklad

Definice 1

Jsou-li $X_1, \dots, X_p$ náhodné veličiny, pak sloupcový vektor (matice $p \times 1$)

$$\mathbf{X}_{p \times 1} = (X_1, \dots, X_p)^T$$

se nazývá náhodný vektor.

Náhodný vektor lze popsat

- pomocí funkcí
- pomocí číselných charakteristik

Dále budou uvedeny funkce pro dvourozměrný vektor $(X_1, X_2)^T$ resp. $(X, Y)^T$ a číselné charakteristiky obecně, pro vektor $(X_1, \dots, X_p)^T$

11.1 Popis náhodného vektoru pomocí funkcí

Používají se stejné funkce jako u náhodné veličiny: p , f , F . Rozlišuje se ale, jsou-li určeny pro popis vektoru = *sdružené (simultánní) funkce*, nebo jednotlivých náhodných veličin = *marginální funkce*.

Definice 2 (simultánní funkce)

a) $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ je sdružená pravděpodobnostní funkce

b) $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$ je sdružená distribuční funkce

c) $f(x,y) = \frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta x \delta y}$ je sdružená hustota pravděpodobnosti

Vztah distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti je obdobný jako u náhodné proměnné

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy$$

$F(x,y)$ lze použít také k výpočtu pravděpodobnosti $P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)$, podobně jako pro X pravděpodobnost $P(x < X < x + \Delta x)$.

Věta 1

$$\begin{aligned} P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) = \\ = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y) \end{aligned}$$

Definice 3 (marginální funkce)

a) $F_1(x) = P(X < x)$

b) $F_2(y) = P(Y < y)$

c) $f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$

d) $f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy}$

Věta 2 (o vztahu simultánních a marginálních funkcí)

$$F_1(x) = P(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

$$F_2(y) = P(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

Marginální distribuční funkce lze také počítat podle známých vztahů

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(y) dy$$

Marginální hustota pravděpodobnosti se také může počítat dvěma způsoby

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Třetím typem funkcí u náhodných vektorů jsou podmíněné funkce.

Definice 4 (podmíněná hustota pravděpodobnosti)

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

V dalším se nebudeme zabývat popisem náhodných vektorů pomocí uvedených funkcí. Proto nejsou ani číslovány.

11.2 Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Definice 5 (momentové charakteristiky).

Necht' $(X, Y)^T$ je náhodný vektor se simultánní pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$.

a) Obecný moment řádu $k + s$ pro (diskrétní) náhodný vektor $(X, Y)^T$ je

$$\mu_{k,s} = \sum_x \sum_y x^k y^s p(x, y) \quad (1)$$

b) Centrální moment řádu $k + s$ pro (diskrétní) náhodný vektor $(X, Y)^T$ je definován vztahem

$$\nu_{k,s} = \sum_x \sum_y (x - \mu_{1,0})^k (y - \mu_{0,1})^s p(x, y) \quad (2)$$

Prakticky se používají pro vektor $(X, Y)^T$ tyto momenty:

1. **Střední hodnoty** (první obecné momenty)

$$EX = \mu_{1,0} \quad a \quad EY = \mu_{0,1} \quad (3)$$

2. **Disperze** (druhé centrální momenty; uvádíme různá značení)

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= DX = \nu_{2,0} = \sigma_X^2 \\ E(Y - EY)^2 &= DY = \nu_{0,2} = \sigma_Y^2 \end{aligned} \quad (4)$$

3. **Kovariance** (druhý smíšený centrální moment)

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = \nu_{1,1} = \sigma_{X,Y} \quad (5)$$

Při značení vektoru $X = (X_i, X_j)^T$ píšeme

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)$$

Speciálně

$$\text{cov}(X_i, X_i) = E(X_i - EX_i)(X_i - EX_i) = DX_i = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$$

4. Koeficient korelace

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (6)$$

Věta 3 (vyjádření centrálních momentů pomocí obecných momentů)

Stejně jako u náhodné proměnné platí i zde vztahy mezi obecnými a centrálními momenty:

$$\text{a) } \sigma_X^2 = \nu_{2,0} = \mu_{2,0} - \mu_{1,0}^2$$

$$\text{b) } \sigma_Y^2 = \nu_{0,2} = \mu_{0,2} - \mu_{0,1}^2$$

$$\text{c) } \sigma_{X,Y} = \nu_{1,1} = \mu_{1,1} - \mu_{1,0} \cdot \mu_{0,1}$$

Věta 4 (vlastnosti kovariance)

Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, potom $\text{cov}(X,Y) = 0$.

Poznámky:

- a) z věty plyne, že potom také $\rho = 0$
- b) obrácené tvrzení (je-li $\rho = 0$, jsou X a Y nezávislé) neplatí.

Věta 5 (vlastnosti koeficientu korelace)

Jestliže $Y = \alpha + \beta X$, potom

$$\text{a) } \rho_{X,Y} = +1 \text{ pro } \beta > 0$$

$$\text{b) } \rho_{X,Y} = -1 \text{ pro } \beta < 0$$

p - rozměrné vektory

Definice 6

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_q)^T$ jsou náhodné vektory.

- a) **Střední hodnota** náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je vektor středních hodnot náhodných veličin:

$$E\mathbf{X} = (EX_1, \dots, EX_p)^T$$

b) **Varianční matice** je matice kovariancí náhodných veličin X_i, X_j

$$\text{var}(\mathbf{X}) = [\text{cov}(X_i, X_j)] = [\sigma_{ij}]$$

c) **Kovarianční matice** je matice kovariancí náhodných veličin X_i, Y_j

$$\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [\text{cov}(X_i, Y_j)]$$

Poznámka: $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \text{var}(\mathbf{X})$

Věta 6 (o způsobu nalezení varianční matice)

$$\text{var}(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^T \quad (7)$$

Věta 7 (vlastnosti $E\mathbf{X}$ a $\text{var } \mathbf{X}$)

Je-li $\mathbf{Y} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}$, kde $\mathbf{X}$ je náhodný vektor $n \times 1$, $\mathbf{A}$ je číselná matice $m \times 1$, $\mathbf{B}$ je číselná matice $m \times n$, potom platí

- a) $E\mathbf{Y} = \mathbf{A} + \mathbf{B} E\mathbf{X}$
- b) $\text{var } \mathbf{Y} = \mathbf{B} \text{var} \mathbf{X} \mathbf{B}^T$

(8)

11.3 Důležité typy rozdělení náhodných vektorů

Uvedeme definice a vlastnosti těchto rozdělení:

- a) multinomické rozdělení (zobecnění binomického)
- b) vícerozměrné hypergeometrické rozdělení (zobecnění hypergeometrického)
- c) vícerozměrné normální rozdělení

Multinomické rozdělení

Definice 7

Mějme pokus s možnými výsledky (jevy) $x_1, x_2, \dots, x_s$ které nastanou s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \dots, p_s$. Pravděpodobnost, že při n opakováních pokusu nastane jev x_1 celkem n_1 -krát, ..., x_s celkem n_s -krát v *určitém pořadí* je

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$$

Počet všech možných pořadí je dán počtem permutací z n prvků, mezi nimiž je $n_1, n_2, \dots, n_s$ stejných:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_s!}$$

Pravděpodobnost, že jevy $x_1, \dots, x_s$ nastanou postupně n_1 krát, ..., n_s krát v *libovolném pořadí* je

$$P = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_s!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s} = n! \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{n_i}}{n_i!}$$

Bude-li náhodná proměnná X_1 představovat počet výskytu jevu $x_1, \dots, X_s$ počet výskytu jevu x_s , můžeme psát

$$P(X_1 = n_1, \dots, X_s = n_s) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_s!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s} \quad (9)$$

Jestliže náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_s)^T$ nabývá hodnoty $(n_1, \dots, n_s)$ s pravděpodobností podle vzorce (9) říkáme, že $\mathbf{X}$ má multinomické rozdělení.

Multinomické rozdělení je nejdůležitějším diskrétním mnohorozměrným rozdělením.

Následující věty jsou základem testu chí-kvadrát, kontingenčních tabulek a dalších testů ve statistice.

Věta 8

Jestliže vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$ má multinomické rozdělení, pak náhodná veličina

$$\sum_{i=1}^k \frac{(X_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \quad (10)$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptoticky rozdělení χ^2_{k-1} .

Zjištěným hodnotám veličin $X_1, \dots, X_k$ se říká empirické četnosti (a značí se ve statistice n_i), čísla $n \cdot p_1, \dots, n \cdot p_k$ se nazývají teoretické četnosti.

Tato věta je např. základem testu chí kvadrát.

Často jsou pravděpodobnosti $p_1, \dots, p_k$ uvažovaného multinomického rozdělení závislé na neznámých parametrech $(a_1, \dots, a_m)$. Potom bude mít věta 8 následující tvar.

Věta 9

Máme-li k pravděpodobností závislých na m parametrech $(a_1, \dots, a_m) = \mathbf{a}$, tj.

$p_1(\mathbf{a}), \dots, p_k(\mathbf{a})$, pak náhodná veličina

$$\sum_{i=1}^k \frac{(X_i - n \cdot p_i(a))^2}{n \cdot p_i(a)} \quad (11)$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptoticky rozdělení χ^2_{k-m-1} .

Vícerozměrné hypergeometrické rozdělení

Definice 8

Nechť je mezi N prvky M_1 prvního druhu, ..., M_s s -tého druhu. Náhodně se vybere n prvků a hledá se pravděpodobnost, že n_1 je prvního druhu, ..., n_s je s -tého druhu. Náhodná veličina X_i představuje počet výskytů prvků i -tého druhu.

Jestliže náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_s)^T$ nabývá hodnoty $(n_1, \dots, n_s)$ s pravděpodobnostmi

$$P(X_1 = n_1, \dots, X_s = n_s) = \frac{\binom{M_1}{n_1} \binom{M_2}{n_2} \dots \binom{M_s}{n_s}}{\binom{N}{n}} \quad (12)$$

říkáme, že $\mathbf{X}$ má vícerozměrné hypergeometrické rozdělení.

Vícerozměrné normální rozdělení

Definice 9

Mějme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ a varianční maticí $\mathbf{V}$. Řekneme, že $\mathbf{X}$ má n rozměrné normální rozdělení s parametry $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$, jestliže každá lineární kombinace $X_1, \dots, X_n$ (a proto i každé X_i) má normální rozdělení, tj. jestliže pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ platí

$$\mathbf{c}^T \mathbf{X} \sim N(\mathbf{c}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{c}).$$

Píšeme

$$X \sim N_n(\mu, V)$$

Hustota pravděpodobnosti pro $X \sim N_n(\mu, V)$ má tvar,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |V|^{1/2}} e^{\frac{-1}{2} (X-\mu)^T V^{-1} (X-\mu)} \quad (13)$$

Pro $n = 1$ dostáváme z (13) rovnici Gaussovy křivky.

Věta 10

Jestliže $X \sim N_n(\mu, V)$, pak $EX = \mu$, $\text{var } X = V$.

Věta 11

Je-li $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ náhodný vektor s rozdělením $X \sim N_n(\mu, V)$, $\mathbf{A}$ je číselná matice $m \times 1$, $\mathbf{B}$ je číselná matice $m \times n$, pak náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ má rozdělení

$$N(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mu, \mathbf{BVB}^T)$$

Poznámka

Tato věta je analogií k větě o rozdělení veličiny $Y = a + b.X$, když X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta 12

Mějme náhodný vektor $X \sim N_n(\mu, V)$. Pak náhodná veličina $(X - \mu)^T V^- (X - \mu)$, kde $h(V) = k$ (V má hodnotu k) a V^- je pseudoinverzní matice, má rozdělení χ_k^2 .

Existuje-li k matici V inverze, lze pseudoinverzní matici V^- nahradit touto inverzí.



Shrnutí kapitoly 11

V poslední kapitole tohoto textu byly vysvětleny způsoby popisu náhodného vektoru. Zvláště významné z hlediska matematické statistiky jsou číselné charakteristiky, zejména varianční matice. Je potřeba znát její definici, způsob výpočtu a vlastnosti. Významné aplikace mají také multinomické rozdělení a vícerozměrné normální rozdělení.



Otázky ke kapitole 11

1. Definujte náhodný vektor
2. Napište definiční rovnice funkcí, sloužících k popisu náhodného vektoru
3. Napište definici varianční matice
4. Jak se počítá varianční matice
5. Uveďte vlastnosti varianční matice. Uveďte analogickou vlastnost pro náhodnou proměnnou.
6. Jak se počítá obecný (centrální moment řádu k, s
7. Jak se počítá kovariance
8. Uveďte tři centrální momenty druhého řádu a vyjádřete je pomocí obecných momentů
9. Jak se počítá koeficient korelace
10. Uveďte vlastnosti koeficientu korelace
11. Definujte multinomické rozdělení
12. Definujte vícerozměrné normální rozdělení



Úlohy ke kapitole 11

1. Dokažte (dosazením a výpočtem), že $\text{var } \mathbf{X} = E(\mathbf{X}-E\mathbf{X})(\mathbf{X}-E\mathbf{X})^T$, jestliže

$$E\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

2. Dokažte, že $\text{var } \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{B} \text{var} \mathbf{X} \mathbf{B}^T$; $\mathbf{B}$ je matice čísel, $\mathbf{X}$ je náhodný vektor.
3. Jak se počítá varianční matice pro náhodný vektor $(X_1, \dots, X_5)^T$
4. Jaké vlastnosti má varianční matice
5. Dokažte vlastnosti koeficientu korelace $\rho(X, Y)$

LITERATURA

1. Anděl, J.: *Matematická statistika*. SNTL, Praha 1978, 344 s.
2. Hátle, J.-Likeš, J.: *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. SNTL, Praha 1975, 463 s.
3. Antoch, J.-Vorlíčková, D.: *Vybrané metody statistické analýzy dat*. Academia, Praha 1992, 279 s. ISBN 80-200-0204-9.
4. Likeš, J.-Machek, J.: *Počet pravděpodobnosti*. SNTL, Praha 1982, 159s.
5. Tošenovský, J.-Noskiewičová, D.: *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Montanex, Ostrava 2000, 360 s. ISBN 80-7225-040-X.
6. Tošenovský, J.-Dudek, M.: *Základy statistického zpracování dat*. VŠB-TU Ostrava 2006, 79 s.
7. Meloun, M.-Militký, J.: *Komplexní statistické zpracování dat*. Academia, Praha 2002, 764 s. ISBN 80-200-1008-4.